

DEVOIR 1 (individuel) – Rappel Mathématique

Automne 2004

Question 1

a) Calculez les dérivées partielles de premier ordre pour les fonctions suivantes et évaluez-les aux valeurs indiquées :

1. $z = f(x, y) = 3x^3 - x^2 + 3y^3 - y^2$;
évaluez $f_x(2,1)$ et $f_y(2,1)$.

2. $z = f(x, y) = 3x^3 - y^2 + 2x^2y - 2y^3x + y$;
évaluez $f_x(1,2)$, $f_x(3,4)$, $f_y(1,2)$ et $f_y(3,4)$.

b) Calculez les dérivées partielles de second ordre $\partial^2 z / \partial x^2$, $\partial^2 z / \partial y^2$, $\partial^2 z / \partial x \partial y$ et $\partial^2 z / \partial y \partial x$ pour les fonctions suivantes et, pour la fonction de la première sous question, évaluez-les aux valeurs indiquées :

1. $z = f(x, y) = x^3 + x^2y^2 + 2xy$;
évaluez $f_{xx}(3,2)$, $f_{yy}(4,1)$, $f_{xy}(1,3)$, $f_{yx}(1,3)$.

2. $z = f(x, y) = \ln(2x + y)$.

3. $z = f(x, y) = 2x^4 - 7x^2y^2 + 5y^2 - 3y^4$.

Question 2

La fonction de coût d'une entreprise qui produit conjointement deux outputs, x et y , est donnée par :

$$CT = f(x, y) = 4x^2 + 5y^2 - 3xy + 525.$$

- a) Calculez les dérivées partielles de premier ordre f_x et f_y . Interprétez.

- b) Calculez les dérivées partielles de second ordre f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} et f_{yx} . Quelle information fournit le signe de chacune de ces dérivées?

Question 3

Soit la fonction de production $y = L^{1/3} K^{2/3}$, où L représente l'input travail et K l'input capital. Au départ, l'entreprise utilise $L = 64$ et $K = 27$ unités de ces inputs, puis décide d'augmenter le travail de une unité et le capital de deux unités. De combien l'output y augmentera-t-il? Votre réponse doit comporter une valeur exacte et une valeur approximative

Question 4.

Les fonctions suivantes sont-elles homogènes? Si oui, déterminez leur degré d'homogénéité **en utilisant le théorème d'Euler** :

1. $f(x, y) = 4x^{1/8} y^{1/8} - 2x^{1/4}.$

2. $g(x, y) = \frac{x + y}{xy}.$

3. $h(x, y, z) = 6x^{1/6} y^{1/6} z^{-1/3}.$

4. $j(x, y) = 5x^4 y^2 - 3x^6 - 2y^6 - 10.$

Question 5

Soit la fonction :

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_1 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_3$$

- Cette fonction est-elle concave ou convexe? Justifiez.
- Trouvez son optimum.
- L'optimum trouvé en b) est-il un max ou un min? Justifiez.

Question 6

Une entreprise cherche à déterminer le plus grand niveau de production Q qu'elle peut atteindre à partir de ses facteurs de production L , K et E , ie le travail, le capital et l'énergie. Toutefois, le budget qu'on lui a alloué pour l'achat de ses facteurs de production ne peut dépasser 60,000\$, ce qui se traduit par la contrainte suivante :

$$CT = 10L + 5K + 2E = 60,000 \$$$

Sachant que sa technologie est donnée par la fonction de production :

$$Q = 2,5L^{1/2} K^{1/3} E^{1/6}.$$

- Trouvez, en utilisant la technique du Lagrangien, les quantités de facteurs qui lui permettraient de maximiser son niveau d'output (L^* , K^* , E^*);
- Quel est le niveau d'output maximal (Q^*)?