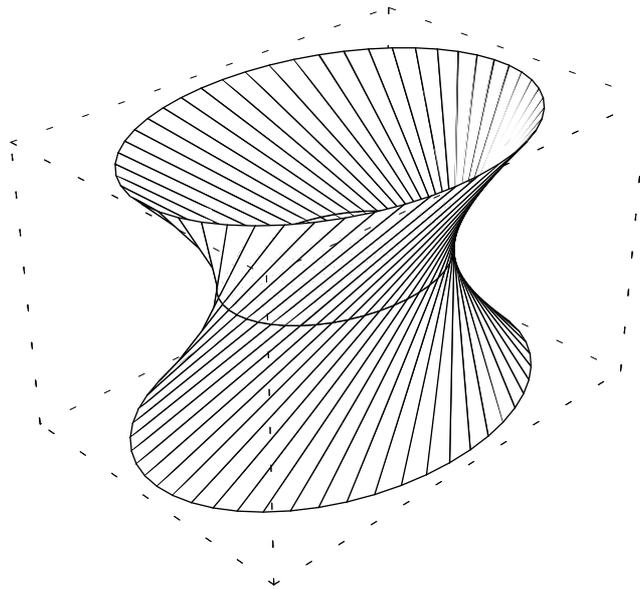




Faculté des sciences

Géométrie



1ers Bacheliers en sciences physiques
Année académique 2006–2007
Michel Rigo

Introduction

Ce texte contient les notes du cours de *géométrie*¹ destiné aux premiers bacheliers en sciences physiques.

On y présente les concepts fondamentaux de la *géométrie affine*. Ceux-ci peuvent être utilisés pour donner une première représentation du monde physique environnant. Pour ce faire, on commence par rappeler quelques résultats et définitions d'algèbre linéaire sur les espaces vectoriels (vecteurs, indépendance linéaire, base, sous-espace vectoriel,...). Une fois ces concepts présentés, il nous sera possible d'introduire les notions fondamentales d'espace affín construit sur un espace vectoriel et de variété affine. On insiste en particulier sur les espaces affíns \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 et sur les aspects analytiques du calcul en composantes dans un repère. En effet, on peut voir \mathbb{R}^3 comme une bonne modélisation de l'espace physique à trois dimensions à une échelle macroscopique.

Pour compléter cette modélisation, on présente la notion de produit scalaire et d'espace vectoriel euclidien associé. De cette manière, on pourra parler d'angles, de perpendicularité, d'orthogonalité, de longueur, etc... On définit en particulier le concept d'orientation du plan et de l'espace ainsi que le produit mixte et le produit vectoriel en dimension 3. (Les définitions rencontrées ici ne seront pas descriptives mais *a priori* plus abstraites. Cette abstraction a un but : permettre d'obtenir directement les propriétés des objets étudiés. Il sera très simple, grâce à ce point de vue, de démontrer le caractère intrinsèque de ces définitions, i.e., l'indépendance par rapport à la base positive choisie.) Se donner un espace affín construit sur un espace vectoriel euclidien débouche sur la *géométrie affine euclidienne*. Encore une fois, on s'attardera plus spécialement sur les cas de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 , les concepts présentés étendant leur champ d'application par exemple à la mécanique ou à l'électricité (pensez au mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique qui s'exprime à l'aide d'un produit vectoriel). Le chapitre consacré à la géométrie euclidienne est clos par une présentation des *polyèdres réguliers* qui interviennent entre autres dans l'étude des agencements possibles de la matière comme par exemple, les cristaux.

Les chapitres suivants sont dédiés aux *applications affines*, aux *courbes* et aux *surfaces*. Dans le premier, on présente des transformations classiques de l'espace comme les translations, les homothéties, les symétries (par rapport à une droite ou un hyperplan) et les rotations (en dimension 2 et 3).

Ensuite, on étudie en détail les courbes et plus particulièrement les arcs réguliers de courbe. On rencontre les courbes par exemple dans l'étude des mouvements. On insistera dès lors sur leur paramétrage et on présentera

¹Il s'agit d'une des deux parties du cours d'*Algèbre et Géométrie* de la première année de bachelier en sciences physiques.

les formules de Frenet que l'on retrouve dans les cours de mécanique analytique. Les deux dernières sections du chapitre abordent les coniques que l'on rencontre notamment en mécanique céleste (pensez par exemple aux lois de Kepler) ou en optique (réflexion de rayons lumineux).

Le dernier chapitre ne fait qu'effleurer la notion de surface et passer en revue plusieurs grandes familles en insistant sur la paramétrisation de ces surfaces. On donnera en fin de chapitre une classification des quadriques.

Dans ces notes, le lecteur trouvera de nombreux exemples illustrant les différentes notions introduites. Signalons qu'en appendice sont repris les résultats sur les systèmes d'équations linéaires ainsi qu'un petit lexique de géométrie élémentaire.

Enfin, on trouvera tout au long de ce texte, de nombreuses notes en bas de page. Elles ont pour but de fournir des compléments d'information. Le détail de ces notes pourra être passé en revue lors d'une seconde lecture du texte.

Table des matières

| | |
|--|----|
| Introduction | i |
| Chapitre I. Introduction aux espaces vectoriels | 1 |
| 1. Premières définitions | 1 |
| 2. Indépendance linéaire | 6 |
| 3. Base d'un espace vectoriel | 10 |
| 4. Changement de base | 15 |
| 5. Sous-espaces vectoriels | 18 |
| 6. Equations paramétriques d'un sous-espace vectoriel | 21 |
| 7. Equations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel | 22 |
| 8. Cas de la dimension 2 | 26 |
| 9. Cas de la dimension 3 | 26 |
| Chapitre II. Espace affine modelé sur un espace vectoriel réel | 33 |
| 1. Définitions | 33 |
| 2. Vecteurs liés | 36 |
| 3. Combinaisons affines | 38 |
| 4. Variétés affines | 42 |
| 5. Intersection et parallélisme | 47 |
| 6. Repères et coordonnées | 50 |
| 7. Equations paramétriques et cartésiennes de variétés affines | 52 |
| 8. Cas de la dimension 2 | 54 |
| 9. Cas de la dimension 3 | 57 |
| Chapitre III. Espace vectoriel euclidien | 65 |
| 1. Produit scalaire | 65 |
| 2. Angle non orienté | 67 |
| 3. Vecteurs orthogonaux | 67 |
| 4. Base orthonormée | 69 |
| 5. Orientation | 71 |
| 6. Produit vectoriel | 76 |
| 7. Complément orthogonal | 80 |
| Chapitre IV. Géométrie affine euclidienne | 85 |
| 1. Repère orthonormé | 85 |
| 2. Angles | 86 |
| 3. Distance de deux points | 89 |
| 4. Variétés affines orthogonales | 90 |

| | |
|---|-----|
| 5. Projection orthogonale | 91 |
| 6. Distance d'un point à une variété affine | 92 |
| 7. Projection orthogonale d'un angle et trigonométrie sphérique | 97 |
| 8. Polyèdres réguliers | 100 |
| Chapitre V. Applications affines | 107 |
| 1. Définition | 107 |
| 2. Translations | 107 |
| 3. Homothéties | 108 |
| 4. Caractérisation | 109 |
| 5. Projections parallèles | 112 |
| 6. Symétries | 113 |
| 7. Rotations | 115 |
| Chapitre VI. Courbes | 119 |
| 1. Fonctions à valeurs dans \mathcal{A} | 119 |
| 2. Arc régulier de courbe | 120 |
| 3. Paramétrages équivalents | 123 |
| 4. Tangente | 124 |
| 5. Orientation | 125 |
| 6. Longueur d'arc et abscisse curviligne | 125 |
| 7. Dérivation de fonctions vectorielles | 129 |
| 8. Courbure et normale principale (cas général) | 130 |
| 9. Trièdre de Frenet | 132 |
| 10. Courbure (cas des courbes planes) | 138 |
| 11. Coniques | 142 |
| 12. Propriétés focales des coniques | 149 |
| Chapitre VII. Une introduction aux surfaces | 157 |
| 1. Définition | 157 |
| 2. Tangente, normale | 159 |
| 3. Surfaces cylindriques | 162 |
| 4. Surfaces coniques | 162 |
| 5. Surfaces de révolution | 163 |
| 6. Surfaces réglées | 165 |
| 7. Surfaces quadriques | 165 |
| Appendice A. Quelques rappels d'algèbre linéaire | 171 |
| 1. Systèmes d'équations linéaires | 171 |
| 2. Rang et systèmes linéaires | 173 |
| Appendice B. Petit lexique de géométrie élémentaire | 177 |
| Appendice C. Lettres grecques | 181 |
| Liste des figures | 183 |

CHAPITRE I

Introduction aux espaces vectoriels

Tout au long de ce texte, nous allons manipuler la notion capitale d'espace vectoriel. Ce premier chapitre est dès lors destiné à présenter les résultats fondamentaux s'y rapportant. Certains résultats sont donnés sans démonstration. Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances pourra consulter les preuves du cours d'algèbre linéaire. De plus, on trouvera en appendice quelques propriétés des systèmes d'équations linéaires.

On verra que les espaces affins reposent sur la notion d'espace vectoriel.

1. Premières définitions

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels (resp. l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes) muni des opérations d'addition et de multiplication de nombres réels (resp. complexes) possède une structure de *champ*¹ car

Ce n'est finalement qu'un rappel de propriétés bien connues.

- L'addition est *associative*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c).$$

Cette propriété permet de donner un sens à une expression comme $a + b + c$ puisque les opérations peuvent être réalisées dans n'importe quel ordre.

- *Existence d'un neutre* pour l'addition

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a = 0 + a.$$

- *Existence d'un opposé* pour l'addition

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a + b = 0 = b + a.$$

Tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$ possède un unique opposé noté $-a$.

- L'addition est *commutative*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a.$$

- La multiplication est *associative*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Cette propriété permet de donner un sens à une expression comme $a \cdot b \cdot c$.

- *Existence d'un neutre* pour la multiplication

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$$

¹Un champ est un corps commutatif.

- La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition; pour tous a, b, c appartenant à \mathbb{R} , on a

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{et} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- Tout élément non nul possède un *inverse* pour la multiplication

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 1 = b \cdot a.$$

- Enfin, la multiplication est *commutative*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a.$$

L'ensemble \mathbb{C} possède bien évidemment les mêmes propriétés.

Remarque I.1.1. D'une manière générale, un ensemble muni d'une opération binaire, interne et partout définie (notée $+$) et qui jouit des trois (resp. quatre) premières propriétés est appelé *groupe* (resp. *groupe commutatif*). Un ensemble qui serait muni de deux opérations binaires, internes, partout définies (notées $+$ et \cdot) et qui satisferaient à toutes les propriétés précédentes sauf à la dernière (commutativité de \cdot) est appelé *corps*.

Un champ (ou même simplement un corps) est un ingrédient essentiel pour définir la notion d'espace vectoriel. Dans ce texte, le champ \mathbb{K} considéré sera toujours égal à \mathbb{R} ou à \mathbb{C} et très rapidement le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sera le seul envisagé. D'une manière générale, on appelle *scalaire* tout élément du champ \mathbb{K} sur lequel est construit l'espace vectoriel.

Définition I.1.2. Un *espace vectoriel* sur \mathbb{K} ou *\mathbb{K} -vectoriel* est un ensemble E muni d'une addition interne²

$$+ : E \times E \rightarrow E$$

et d'une multiplication interne

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

qui jouit des propriétés suivantes :

- (1) $(E, +)$ est un *groupe commutatif*, i.e.,

(1.1) L'opération $+$ est *associative*

$$\forall a, b, c \in E : (a + b) + c = a + (b + c).$$

(1.2) *Existence d'un neutre* pour $+$,

$$\exists e \in E, \forall a \in E : a + e = a = e + a.$$

(1.3) *Existence d'un opposé* pour $+$,

$$\forall a \in E, \exists b \in E : a + b = e = b + a.$$

(1.4) L'opération $+$ est *commutative*,

$$\forall a, b \in E : a + b = b + a.$$

- (2) pour tous $x, y \in E$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

²L'adjectif "*interne*" signifie que l'opération est à valeurs dans l'ensemble E .

$$(2.1) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x,$$

$$(2.2) \quad 1 \cdot x = x,$$

$$(2.3) \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$$

$$(2.4) \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

Si E est un espace vectoriel, les éléments de E sont appelés *vecteurs*. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors on parle souvent d'*espace vectoriel réel* (resp. d'*espace vectoriel complexe*). Le neutre pour $+$ est appelé *vecteur nul* et est noté 0 (il faudra veiller à ne pas confondre le scalaire $0 \in \mathbb{K}$ et le vecteur nul).

Exemple I.1.3. Avant de continuer plus en avant, donnons quelques exemples d'espaces vectoriels.

- L'ensemble \mathbb{R}^3 des vecteurs colonnes à trois composantes est un espace vectoriel réel. L'addition de deux vecteurs est définie composante à composante,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix},$$

la multiplication d'un vecteur par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est aussi définie composante à composante,

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur nul de \mathbb{R}^3 est le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observez la différence entre le vecteur nul de \mathbb{R}^3 et le scalaire (nombre réel) 0 .

Le fait que \mathbb{R}^3 est un espace vectoriel est facile à vérifier. La preuve est laissée au lecteur à titre d'exercice. Cela découle principalement des propriétés de \mathbb{R} . De manière générale \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et \mathbb{C}^n peut être vu soit comme un \mathbb{R} -vectoriel, soit comme un \mathbb{C} -vectoriel.

- Notons $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour faire de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ un espace vectoriel, il faut définir l'addition de deux éléments de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X$$

et la multiplication scalaire par

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in X.$$

Il est immédiat de vérifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel réel ayant pour vecteur nul la fonction $0 : x \mapsto 0$ qui est identiquement nulle.

- Considérons le sous-ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'annulant en 1. Il s'agit encore une fois d'un espace vectoriel réel. En effet, la somme de deux fonctions s'annulant en 1 est encore une fonction s'annulant en 1 et le produit³ d'une fonction s'annulant en 1 par un scalaire est encore une fonction s'annulant en 1. Cela montre

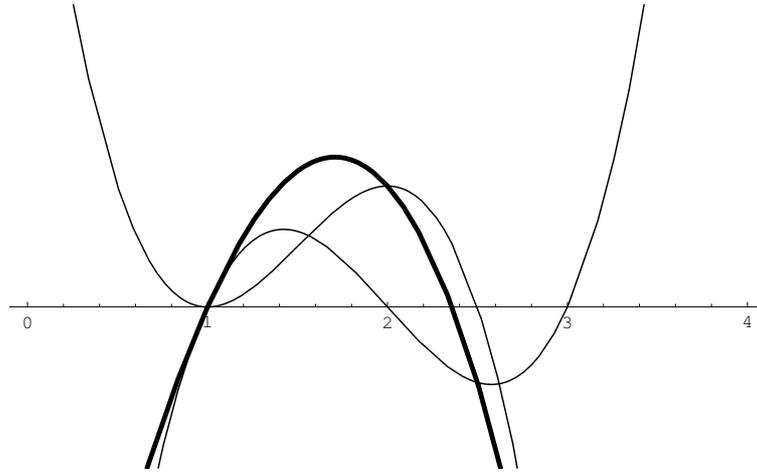


FIGURE I.1. Somme de deux fonctions s'annulant en 1.

donc que les deux opérations d'espace vectoriel sont bien internes. Les vérifications des autres axiomes sont immédiates.

- L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ (resp. $\mathbb{C}[x]$) des polynômes à coefficients réels (resp. complexes) est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{R}[x]_d$ (resp. $\mathbb{C}[x]_d$) des polynômes de degré au plus d à coefficients réels (resp. complexes) est un espace vectoriel. On y considère les opérations d'addition :

$$\begin{aligned} (a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0) + (b_d x^d + b_{d-1} x^{d-1} + \cdots + b_0) \\ = (a_d + b_d) x^d + (a_{d-1} + b_{d-1}) x^{d-1} + \cdots + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

et de multiplication par un scalaire :

$$\begin{aligned} \lambda (a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0) \\ = (\lambda a_d) x^d + (\lambda a_{d-1}) x^{d-1} + \cdots + (\lambda a_0). \end{aligned}$$

- L'ensemble \mathcal{Z} des polynômes dont la somme des coefficients est nulle est aussi un espace vectoriel. En effet, si

$$P(x) = p_r x^r + \cdots + p_0 \quad \text{et} \quad Q(x) = q_s x^s + \cdots + q_0$$

³On peut d'ores et déjà noter la nécessité du caractère interne des opérations. La somme de deux éléments de E est encore un élément de E et le produit d'un élément de E par un scalaire est encore un élément de E .

sont deux polynômes appartenant à \mathcal{Z} , alors $P + Q$ appartient encore à \mathcal{Z} car

$$\underbrace{p_0 + \cdots + p_r}_{=0} + \underbrace{q_0 + \cdots + q_s}_{=0} = 0$$

et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda P \in \mathcal{Z}$ car

$$\lambda p_0 + \cdots + \lambda p_r = \lambda \underbrace{(p_0 + \cdots + p_r)}_{=0} = 0.$$

Encore une fois, les vérifications des autres axiomes sont immédiates.

- ▶ L'ensemble des solutions d'un système homogène d'équations linéaires possède aussi une structure d'espace vectoriel.
- ▶ L'ensemble \mathbb{R}_m^n (resp. \mathbb{C}_m^n) des matrices $n \times m$ à n lignes et m colonnes muni de l'addition de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire possède une structure d'espace vectoriel. On remarquera que \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n n'en sont que des cas particuliers.

Proposition I.1.4. Soient E un \mathbb{K} -vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\Rightarrow x = y \quad \text{et} \quad z + x = z + y \Rightarrow x = y, \\ 0 \cdot x &= 0, \\ \lambda \cdot 0 &= 0, \\ \lambda \cdot x = \lambda \cdot y &\Rightarrow (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = y), \\ (-\lambda) \cdot x &= -(\lambda \cdot x). \end{aligned}$$

Les preuves ne sont pas difficiles mais constituent un bon moyen de se familiariser avec les axiomes des espaces vectoriels.

Démonstration. Si $x + z = y + z$, on ajoute à chaque membre l'unique vecteur $-z$, opposé de z , pour obtenir $x + 0 = y + 0$ et donc $x = y$.

Pour tout $x \in E$, $x + 0 = x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x$. De la première propriété, il s'ensuit que $0 \cdot x = 0$.

Prouvons que $\lambda \cdot 0 = 0$. On a $\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + 0$ et donc, par la première propriété, $\lambda \cdot 0 = 0$.

Pour vérifier l'avant-dernière propriété, si $\lambda \neq 0$, il suffit de multiplier les deux membres par le scalaire $\frac{1}{\lambda}$.

Enfin, on a

$$0 = 0 \cdot x = (\lambda + (-\lambda)) \cdot x = \lambda \cdot x + (-\lambda) \cdot x.$$

Ceci montre que $(-\lambda) \cdot x$ est l'opposé de $\lambda \cdot x$ que l'on note $-(\lambda \cdot x)$. ■

Remarque I.1.5. Cette dernière propriété montre la cohérence de la notation $-x$ puisque $(-1) \cdot x = -x$. En particulier, on notera $x + (-y)$ simplement $x - y$. Nous avons alors $x - x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$, pour tout $x \in E$. Dans la suite, nous écrirons λx au lieu de $\lambda \cdot x$.

2. Indépendance linéaire

Définition I.2.1. Soient E un espace vectoriel et x_1, \dots, x_r des éléments de E , $r \geq 1$. Les vecteurs x_1, \dots, x_r sont *linéairement dépendants* s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = 0.$$

Dans le cas contraire, ils sont dits *linéairement indépendants*. Cela signifie que si on a une relation de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = 0$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des scalaires, alors

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Une expression de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs x_1, \dots, x_r . Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les *coefficients* de cette combinaison. Autrement dit, x_1, \dots, x_r sont linéairement indépendants si la seule façon d'obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire de ces vecteurs est de considérer une combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple I.2.2. Plaçons-nous une fois encore dans \mathbb{R}^3 .

- ▶ Les vecteurs

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants car la seule manière d'avoir $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ est de prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

- ▶ Les vecteurs

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants car⁴

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

- ▶ Le vecteur nul 0 est linéairement dépendant car pour tout $\lambda \neq 0$, on a $\lambda 0 = 0$.
- ▶ Les vecteurs

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants puisque $0x_1 + 1x_2 = 0$. En fait, cet exemple nous montre déjà que si parmi des vecteurs x_1, \dots, x_r , on

⁴On dit qu'on est en présence d'une *relation linéaire* liant x_1, x_2, x_3 .

trouve le vecteur nul, alors ces vecteurs sont linéairement dépendants.

- Les vecteurs

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ \pi \\ -2 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants car

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 = 0.$$

En effet, on a vu ci-dessus que x_1, x_2, x_3 étaient linéairement dépendants. Par conséquent, adjoindre un ou des vecteurs à des vecteurs linéairement dépendants fournit des vecteurs qui restent linéairement dépendants.

- Les *vecteurs unitaires* de \mathbb{R}^3

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

Remarque I.2.3. Tout vecteur de \mathbb{R}^n s'écrit (de manière unique) sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs unitaires. En effet,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple I.2.4. Voici quelques exemples de vecteurs linéairement dépendants et indépendants dans des espaces vectoriels autres que \mathbb{R}^3 .

- Si on considère \mathbb{C} comme un espace vectoriel réel⁵, les vecteurs 1 et i sont linéairement indépendants. En effet, si $a, b \in \mathbb{R}$ et si $a + ib = 0$, alors $a = b = 0$.
- Si on considère à présent \mathbb{C} comme un espace vectoriel complexe, les vecteurs 1 et i sont linéairement dépendants. Il suffit de trouver deux nombres complexes a et b non simultanément nuls tels que $a + ib = 0$. On vérifie que $a = 1$ et $b = i$ conviennent.

⁵On s'autorise donc uniquement comme opérations, l'addition de nombres complexes et la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel. En d'autres termes, on a droit aux combinaisons linéaires à coefficients réels de nombres complexes.

- Considérons le \mathbb{R} -vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont linéairement indépendantes. En effet, si $a, b \in \mathbb{R}$ et si⁶

$$a \cos(x) + b \sin(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors, pour $x = 0$ et $x = \pi/2$, on déduit que $a = b = 0$. Par contre, les fonctions $\cos(x)$, $\cos(3x)$ et $\cos^3(x)$ sont linéairement dépendantes car $\cos(3x)$ est combinaison linéaire de $\cos^3(x)$ et $\cos(x)$.

- Les matrices suivantes de \mathbb{C}_2^2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. En effet, soient a, b, c des nombres complexes tels que

$$aA + bB + cC = 0.$$

Cette égalité est équivalente à

$$\begin{cases} a - b + ic = 0 \\ c = 0 \\ a + ib + ic = 0 \end{cases}$$

et ce système possède l'unique solution $a = b = c = 0$.

- Les fonctions polynomiales $1, x$ et x^2 sont des vecteurs linéairement indépendants de l'espace $\mathbb{R}[x]$ (resp. $\mathbb{R}[x]_2$). En effet, si

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors $a = b = c = 0$.

- De la même façon, les fonctions polynomiales $\alpha, x + \alpha, (x + \alpha)^2$, ($\alpha \neq 0$) sont aussi linéairement indépendantes. En effet, si

$$a(x + \alpha)^2 + b(x + \alpha) + c\alpha = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors on en tire le système triangulaire suivant

$$a = 0, \quad 2a\alpha + b = 0, \quad a\alpha^2 + b\alpha + c\alpha = 0$$

qui possède l'unique solution $a = b = c = 0$.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition de l'indépendance linéaire et leur démonstration est laissée à titre d'exercice au lecteur.

- Pour qu'un seul vecteur soit linéairement indépendant, il faut et il suffit que ce vecteur soit non nul.
- Parmi des vecteurs linéairement indépendants, on ne peut trouver que des vecteurs linéairement indépendants.

C'est un bon exercice !

⁶Remarquer que dans cet exemple, le vecteur nul est la fonction réelle zéro $0 : x \mapsto 0$. Insistons une fois encore sur le fait qu'il faille prendre garde à ne pas confondre le zéro 0 de \mathbb{R} ou \mathbb{C} et le vecteur nul, aussi noté 0 , de l'espace vectoriel considéré.

- Si des vecteurs x_1, \dots, x_r sont linéairement dépendants, alors quel que soit le vecteur y , les vecteurs x_1, \dots, x_r, y sont encore linéairement dépendants.

Proposition I.2.5. *Soient p un entier positif, x_1, \dots, x_p des vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E et y un vecteur de E . Alors y est combinaison linéaire de x_1, \dots, x_p si et seulement si les vecteurs x_1, \dots, x_p, y sont linéairement dépendants.*

Démonstration. Si y est combinaison linéaire de x_1, \dots, x_p , alors il est clair que x_1, \dots, x_p, y sont linéairement dépendants. Réciproquement, supposons x_1, \dots, x_p, y linéairement dépendants. Il existe donc des scalaires non tous nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda y = 0.$$

Si λ était nul, les vecteurs x_1, \dots, x_p seraient linéairement dépendants. Par conséquent, $\lambda \neq 0$ et on trouve

$$y = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda} x_p.$$

■

Nous donnons sans démonstration le résultat suivant.

Théorème I.2.6 (Théorème de Steinitz). *Soit p un entier positif, $p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont linéairement dépendantes.*

■

Au vu de la remarque I.2.3, tout vecteur de \mathbb{R}^n est combinaison linéaire d'au plus n vecteurs (à savoir les n vecteurs unitaires). Ainsi, le résultat suivant est immédiat.

Corollaire I.2.7. *Dans \mathbb{R}^n , on ne peut trouver plus de n vecteurs linéairement indépendants.*

Démonstration. Soient y_1, \dots, y_{n+1} des vecteurs quelconques de \mathbb{R}^n . Il s'agit de $n + 1$ combinaisons linéaires des n vecteurs unitaires e_1, \dots, e_n et sont donc linéairement dépendants.

■

Définition I.2.8. Soient E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On dit que A est une *partie libre* si les vecteurs de A sont linéairement indépendants. Dans le cas contraire, A est une *partie liée*.

Remarque I.2.9. Si A est une partie libre et si $B \subset A$, alors B est libre aussi.

3. Base d'un espace vectoriel

A partir de maintenant, nous considérons uniquement des espaces vectoriels réels. Nous pouvons cependant noter que les notions développées plus bas pourraient être introduites dans n'importe quel type d'espace vectoriel.

Dans la remarque I.2.3, nous avons vu que tout vecteur de \mathbb{R}^n pouvait toujours s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs unitaires e_1, \dots, e_n . La notion de partie génératrice généralise cette constatation.

Définition I.3.1. Soient E un espace vectoriel et B un sous-ensemble de E . On dit que B est une *partie génératrice* de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire⁷ d'éléments de B . On dit encore que B *engendre* E . Si B ne contient qu'un nombre fini de vecteurs, on dit que B est une *partie génératrice finie* et que E est de *dimension finie*.

Remarque I.3.2. Si B est une partie génératrice de E et si $B \subset A$, alors A est aussi une partie génératrice de E .

Exemple I.3.3. Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forment une partie libre (qui n'est pas génératrice) et les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

forment une partie génératrice de \mathbb{R}^3 (mais cette partie n'est pas libre).

Définition I.3.4. Une *base* de E est une partie⁸ libre et génératrice de E .

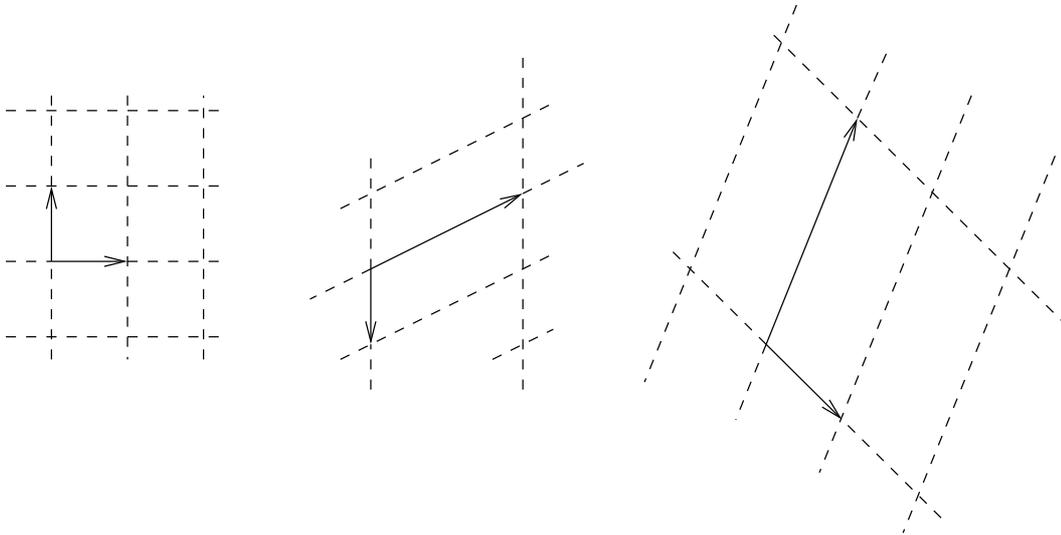
Exemple I.3.5. Voici trois bases de \mathbb{R}^2 ,

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Pour le vérifier, il faut montrer d'une part, que les deux vecteurs constituant la base sont linéairement indépendants et d'autre part, que tout élément de \mathbb{R}^2 se décompose comme somme de ces deux vecteurs.

⁷Il est sous-entendu que les combinaisons linéaires sont à coefficients dans le champ \mathbb{K} sur lequel est construit l'espace vectoriel E . Nous avons choisi de considérer uniquement des espaces vectoriels sur \mathbb{R} .

⁸Le vocable "partie" est très certainement mal choisi ! En effet, comme nous le verrons par la suite (lorsque nous parlerons des composantes d'un vecteur dans une base), si une base contient n éléments, on considérera cette base comme un n -uplet ordonné. Par exemple, parler de la première composante d'un vecteur fait référence au premier élément de la base. Cette dernière est donc ordonnée.

FIGURE I.2. Bases de \mathbb{R}^2 .

Par exemple, pour la deuxième base, un élément quelconque $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 se décompose comme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{x}{2} - y\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ce qui montre bien que ces deux vecteurs forment une partie génératrice de \mathbb{R}^2 .

Exemple I.3.6. Les n vecteurs e_1, \dots, e_n forment une base de \mathbb{R}^n . On l'appelle la *base canonique* de \mathbb{R}^n .

Théorème I.3.7.⁹ Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors,

- i) toute partie génératrice finie de E contient une base,
- ii) toute partie libre finie de E est incluse dans une base.

■

Exemple I.3.8. Poursuivons l'exemple I.3.3 pour illustrer le théorème précédent (les justifications sont laissées au lecteur). Aux vecteurs,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

⁹Le point ii) du théorème est parfois appelé *théorème de la base incomplète* car, si x_1, \dots, x_p sont linéairement indépendants et si y_1, \dots, y_q forment une partie génératrice de E , alors on peut compléter x_1, \dots, x_p par certains des vecteurs y_i pour obtenir une base de E .

on peut adjoindre, par exemple, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une base de \mathbb{R}^3 . Pour les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

il suffit de supprimer un quelconque d'entre eux pour avoir une base de \mathbb{R}^3 .

Proposition I.3.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors,*

- i) E possède une base,
- ii) deux bases quelconques de E ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. Le premier point résulte de la proposition précédente. En effet, si E est de dimension finie, cela signifie qu'il contient une partie génératrice finie et toute partie génératrice contient une base.

Soient B et B' deux bases de E contenant respectivement p et p' éléments. Les p éléments de B sont linéairement indépendants et sont aussi p combinaisons linéaires des p' éléments de B' . Vu le théorème de Steinitz, $p \leq p'$. De manière analogue, on a $p' \leq p$.

■

Définition I.3.10. Le théorème précédent nous montre que toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la *dimension* de E et est noté $\dim E$. De plus, on définit la dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$ en posant $\dim\{0\} = 0$.

Corollaire I.3.11. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Toute partie libre (resp. génératrice) contient au plus (resp. au moins) n éléments. Si A est une partie libre (resp. génératrice) de E contenant n éléments, alors A est une base.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème I.3.7 et de la proposition précédente.

■

Nous en arrivons à la propriété fondamentale des bases. Tout vecteur se décompose de manière unique dans une base. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition I.3.12. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $U = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E . Pour tout $x \in E$, il existe des scalaires uniques $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Ces scalaires $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ s'appellent les *composantes*¹⁰ de x dans la base (u_1, \dots, u_n) .

Démonstration. Puisque U est une base, U est en particulier une partie génératrice de E . Il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Supposons qu'il existe également $x'_1, \dots, x'_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = x'_1 u_1 + \dots + x'_n u_n.$$

En soustrayant membre à membre les deux relations et en utilisant les propriétés des espaces vectoriels, il vient

$$0 = (x_1 - x'_1)u_1 + \dots + (x_n - x'_n)u_n,$$

et donc $x_i = x'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ puisque les vecteurs de U sont linéairement indépendants. ■

Proposition I.3.13. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $U = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E . L'application

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est une bijection telle que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$,

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$$

et

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Démonstration. Le fait que Φ est une bijection résulte de la proposition précédente. Pour le reste, il s'agit de simples vérifications. ■

Le vecteur $\Phi(x)$ est le *vecteur des composantes* de x dans la base U . Si il est nécessaire de faire référence à la base, on écrira alors $\Phi_U(x)$.

Exemple I.3.14. Poursuivons l'exemple I.3.5. On a montré que

$$U = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

était une base de \mathbb{R}^2 . Par exemple, on a la décomposition suivante,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

¹⁰Certains auteurs utilisent aussi le terme *coordonnées*. Nous préférons réserver exclusivement ce dernier terme pour parler des "coordonnées d'un point dans un repère".

A un vecteur, on associe ses composantes dans une base.

Ainsi, les composantes de $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base U sont 2 et -1 . Avec nos notations,

$$\Phi_U\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bien évidemment les composantes d'un vecteur dépendent de la base con-

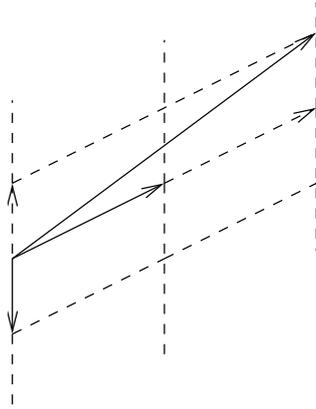


FIGURE I.3. Décomposition d'un vecteur dans une base.

sidérée. En effet, si au lieu de la base U donnée précédemment, on considère la base V construite sur les vecteurs $2e_1$ et $2e_2$,

$$V = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

alors la décomposition du même vecteur est à présent

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_V\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque I.3.15. Cette proposition I.3.13 signifie que l'application Φ préserve les structures d'espace vectoriel de E et de \mathbb{R}^n . On dit que les deux espaces sont *isomorphes* et que Φ est un *isomorphisme*¹¹. En particulier, des vecteurs $y_1, \dots, y_k \in E$ sont linéairement dépendants (resp. indépendants) si et seulement si $\Phi(y_1), \dots, \Phi(y_k) \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement dépendants (resp. indépendants). On pourra dès lors utiliser les techniques vues en algèbre linéaire lorsque, par l'intermédiaire d'une base, on considèrera les composantes des vecteurs. C'est aussi pour cette raison que l'archétype de l'espace vectoriel réel de dimension finie n est \mathbb{R}^n .

¹¹Un isomorphisme est donc non seulement une bijection, mais cette application respecte également les opérations (addition et multiplication par un scalaire) mises en jeu dans le cadre des espaces vectoriels.

4. Changement de base

Le problème posé dans cette section est le suivant. Soit E un espace vectoriel ayant $U = (u_1, \dots, u_n)$ et $U' = (u'_1, \dots, u'_n)$ comme bases. Tout vecteur x de E se décompose de manière unique dans les bases U et U' . Connaissant les composantes x_1, \dots, x_n de x dans la base U , peut-on déterminer les composantes x'_1, \dots, x'_n de x dans la base U' ?

Exemple I.4.1. Soit l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de la base canonique

$$U = (e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

et de la base

$$U' = (u'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Si $x = ae_1 + be_2$, peut-on calculer a' et b' tels que $x = a'u'_1 + b'u'_2$?

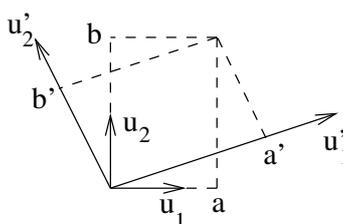


FIGURE I.4. Changement de base.

Les vecteurs de la base U se décomposent de la manière suivante dans la base U' ,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De là, on tire

$$\begin{aligned} x = ae_1 + be_2 &= a \left(\frac{2}{7} u'_1 - \frac{1}{7} u'_2 \right) + b \left(\frac{1}{7} u'_1 + \frac{3}{7} u'_2 \right) \\ &= \left(\frac{2}{7} a + \frac{1}{7} b \right) u'_1 + \left(-\frac{1}{7} a + \frac{3}{7} b \right) u'_2. \end{aligned}$$

Donc

$$a' = \frac{2}{7} a + \frac{1}{7} b \quad \text{et} \quad b' = -\frac{1}{7} a + \frac{3}{7} b.$$

Et sous forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On remarque que la première (resp. seconde) colonne de la matrice est formée des composantes de e_1 (resp. e_2) dans la base U' . On dit que cette matrice est la matrice de changement de base de la base U à la base U' .

Le phénomène illustré par cet exemple est en fait général. On peut démontrer que dans un espace vectoriel E de dimension n possédant deux bases $U = (u_1, \dots, u_n)$ et $U' = (u'_1, \dots, u'_n)$, si le vecteur u_i a

$$\Phi_{U'}(u_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

pour vecteur de composantes dans la base U' , alors pour tout vecteur x de E ,

$$\Phi_{U'}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Phi_U(x).$$

On remarque que la i -ème colonne de cette matrice contient les composantes du i -ème vecteur de l'ancienne base U dans la nouvelle base U' . La connaissance de cette matrice permet donc de calculer les composantes de tout vecteur $x \in E$ dans la base U' connaissant les composantes de x dans la base U . On dit que cette matrice est la *matrice de changement de base* de U à U' .

Exemple I.4.2. Il est aisé de voir que

$$U = (x^2, x, 1) \quad \text{et} \quad U' = ((x + \alpha)^2, x + \alpha, \alpha)$$

sont deux bases de $\mathbb{R}[x]_2$, $\alpha \neq 0$. Un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[x]_2$ s'écrit

$$ax^2 + bx + c = a'(x + \alpha)^2 + b'(x + \alpha) + c'\alpha.$$

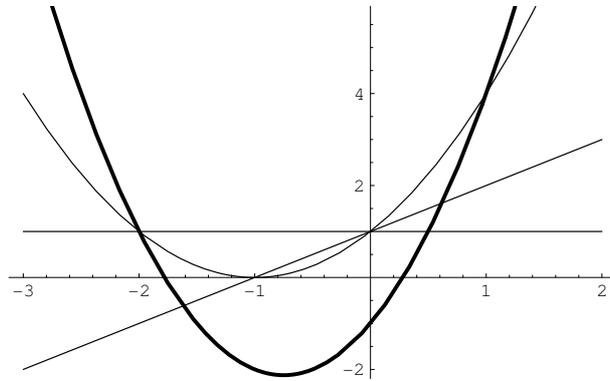
Connaissant a, b, c , nous voudrions trouver un moyen pour calculer a', b', c' . Il est facile de vérifier que

$$\begin{array}{rccccccc} x^2 & = & 1 & (x + \alpha)^2 & -2\alpha & (x + \alpha) & +\alpha & \alpha \\ x & = & 0 & (x + \alpha)^2 & +1 & (x + \alpha) & -1 & \alpha \\ 1 & = & 0 & (x + \alpha)^2 & +0 & (x + \alpha) & +\frac{1}{\alpha} & \alpha \end{array}$$

Ayant à notre disposition les composantes des vecteurs de U dans la base U' , il vient

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\alpha & 1 & 0 \\ \alpha & -1 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Considérons le cas $\alpha = 1$ et le polynôme $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$. La figure suivante reprend le graphique de P en gras et le graphique des trois polynômes de la base U' . On trouve la décomposition de $P(x)$ dans la base U' au moyen

FIGURE I.5. Un polynôme de degré 2 et une base de $\mathbb{R}[x]_2$.

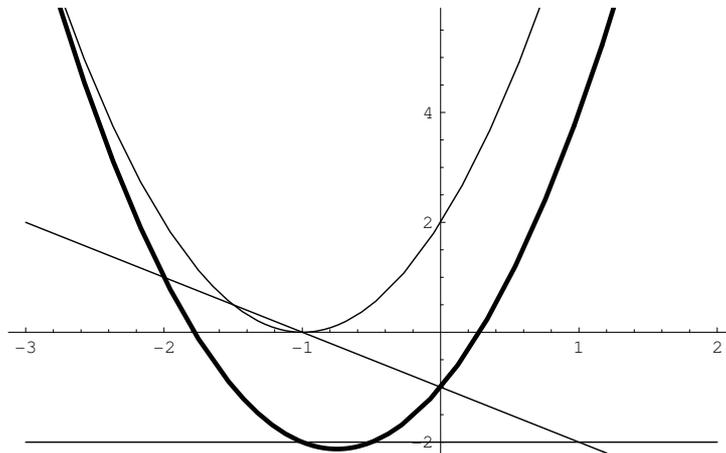
du produit matriciel suivant,

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 1 = 2(x+1)^2 - (x+1) - 2$$

et graphiquement, on a la situation donnée à la figure I.6 (où chaque vecteur de base a été multiplié par le coefficient correspondant).

FIGURE I.6. Décomposition de $P(x)$ dans la base U' .

Il arrive souvent que ce soit les composantes des vecteurs de la nouvelle base U' qui sont données dans la base U . On a dès lors le résultat suivant.

Proposition I.4.3. *Si A est la matrice¹² de changement de base de la base U' à la base U , alors A est inversible et A^{-1} est la matrice de changement*

¹²Les colonnes de A sont formées des composantes des vecteurs de U' dans la base U .

de base de la base U à la base U' . Pour tout vecteur x de E , on a

$$\Phi_U(x) = A\Phi_{U'}(x) \quad \text{et} \quad \Phi_{U'}(x) = A^{-1}\Phi_U(x).$$

■

Exemple I.4.4. Voici un exemple où ce sont les vecteurs de la nouvelle base U' qui sont donnés dans l'ancienne base U . Considérons l'espace \mathbb{R}^4 muni de la base canonique $U = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère les vecteurs f_1, f_2, f_3, f_4 ayant pour vecteur de composantes dans cette base, respectivement¹³ $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1, 1)$. Il est laissé au lecteur le soin de vérifier que $U' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ forme une base de \mathbb{R}^4 . Soit x un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 ,

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = a'f_1 + b'f_2 + c'f_3 + d'f_4.$$

Soit la matrice P' donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où la i -ième colonne contient les composantes de f_i dans la base U . Ainsi, P' est la matrice de changement de base de la base U' à la base U . On a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

et enfin, pour passer des composantes dans la base canonique U à celles dans la base U' , il suffit d'inverser¹⁴ P'

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

En particulier, grâce à cette dernière matrice de changement de base, il est à présent facile de retrouver les composantes des vecteurs de l'ancienne base U dans la nouvelle base U' . Il suffit de regarder les colonnes de P'^{-1} .

5. Sous-espaces vectoriels

Définition I.5.1. Soit E un espace vectoriel. Un sous-ensemble non vide $F \subset E$ est un *sous-espace vectoriel* s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

La preuve du résultat suivant est immédiate.

¹³Pour faciliter l'écriture, nous nous autorisons à écrire un vecteur de \mathbb{R}^4 sous la forme d'un vecteur ligne.

¹⁴Le problème de l'inversion de matrices est traité dans le cours d'algèbre linéaire.

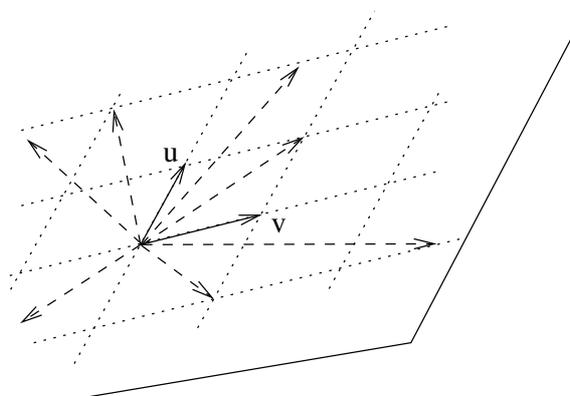


FIGURE I.7. Un sous-espace vectoriel contenant deux vecteurs u et v et leurs combinaisons linéaires.

Proposition I.5.2. *Soit E un espace vectoriel. Le sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si les propositions suivantes sont satisfaites :*

- i) $0 \in F$,
- ii) si $x, y \in F$, alors $x + y \in F$,
- iii) si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

■

Notons que l'on peut remplacer la première condition de la proposition précédente par la condition F non vide, et obtenir un résultat équivalent.

Proposition I.5.3. *Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F muni des opérations induites par celles de E est un espace vectoriel.*

Démonstration. C'est immédiat.

■

Remarque I.5.4. Au vu de cette dernière proposition, on pourra dès lors parler de la dimension d'un sous-espace vectoriel F .

Exemple I.5.5. Voici quelques sous-espaces vectoriels.

- ▶ $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels. On dit que ces sous-espaces sont *triviaux*. Tout sous-espace vectoriel distinct de E et $\{0\}$ est dit *propre*.
- ▶ Dans \mathbb{R}^3 muni d'une base $U = (u_1, u_2, u_3)$, si on note x_1, x_2, x_3 les composantes de $x \in \mathbb{R}^3$ dans la base U , i.e.,

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3,$$

alors les vecteurs x pour lesquels $x_1 + x_2 - x_3$ est nul, forment un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En effet, si

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \quad \text{avec} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

et

$$y = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 \quad \text{avec} \quad y_1 + y_2 - y_3 = 0,$$

alors

$$x + y = (x_1 + y_1)u_1 + (x_2 + y_2)u_2 + (x_3 + y_3)u_3$$

et

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = 0.$$

De la même façon,

$$\lambda x = \lambda x_1u_1 + \lambda x_2u_2 + \lambda x_3u_3$$

et

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 = 0.$$

Pour conclure, on remarquera que cet ensemble est non vide puisqu'il contient le vecteur nul.

- ▶ Les fonctions paires définies sur \mathbb{R} forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} . En effet, la somme de deux fonctions paires f et g est encore une fonction paire :

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

et le produit d'une fonction paire par un nombre réel est encore une fonction paire :

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x).$$

- ▶ Il en va de même de l'ensemble des fonctions périodiques de période P définies sur \mathbb{R} .
- ▶ Les fonctions polynomiales s'annulant en 1 forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes.
- ▶ Les polynômes dont la somme des coefficients est nulle forment aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
- ▶ L'ensemble $\mathbb{R}[x]_d$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
- ▶ L'ensemble des solutions d'un système homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

Définition I.5.6. Soient x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . L'enveloppe linéaire de x_1, \dots, x_p est l'ensemble des combinaisons linéaires de x_1, \dots, x_p . On a

$$\langle x_1, \dots, x_p \rangle = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \}.$$

Proposition I.5.7. Soient x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . L'enveloppe linéaire de x_1, \dots, x_p est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Cela résulte des formules suivantes,

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p) + (\mu_1 x_1 + \dots + \mu_p x_p) = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + \dots + (\lambda_p + \mu_p)x_p$$

et

$$\mu(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p) = (\mu\lambda_1)x_1 + \dots + (\mu\lambda_p)x_p.$$

■

6. Equations paramétriques d'un sous-espace vectoriel

Sauf mention explicite du contraire, nous ne considérons dans ce qui suit que des espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition I.6.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie, inférieure ou égale à n . De plus, si $\dim F = n$, alors $F = E$.*

Démonstration. Si $F = \{0\}$, alors $\dim F = 0$. Supposons $F \neq \{0\}$. Il existe un vecteur non nul appartenant à F . Par le théorème de Steinitz, $n+1$ vecteurs de E ne sont jamais linéairement indépendants. En particulier, $n+1$ vecteurs de F ne sont jamais linéairement indépendants. Soit p le plus grand entier (compris entre 1 et n) pour lequel on peut trouver p vecteurs de F linéairement indépendants. Nommons-les f_1, \dots, f_p . Soit x un vecteur quelconque de F . Par définition de p , il est clair que les vecteurs f_1, \dots, f_p, x sont linéairement dépendants. Au vu de la proposition I.2.5, x est donc combinaison linéaire de f_1, \dots, f_p . Cela signifie que F est engendré par f_1, \dots, f_p . Par conséquent, (f_1, \dots, f_p) est une base de F et

$$\dim F = p \leq n.$$

Si $p = n$, f_1, \dots, f_p sont des vecteurs de E linéairement indépendants, alors, vu le corollaire I.3.11, (f_1, \dots, f_p) est une base de E . Ainsi, F contient une base de E , donc aussi toute combinaison linéaire des vecteurs de cette base, par suite $F = E$. ■

Remarque I.6.2. Si U est une base du sous-espace vectoriel F de E , alors en particulier U est une partie libre de E . Le théorème I.3.7 affirme que l'on peut compléter U pour obtenir une base de E . Autrement dit, toute base de F est contenue dans une base de E .

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $U = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F . (Au vu de la remarque précédente, il existe des vecteurs u_{p+1}, \dots, u_n de E tels que $u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ forment une base de E .) Tout élément de F se décompose de manière unique sous la forme

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \quad , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

Inversement, tout vecteur de E de la forme $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$ appartient à F . Par conséquent, les vecteurs de F sont exactement les éléments $x \in E$ de la forme

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \quad , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

On dit que cette relation est une *équation paramétrique (vectorielle)* de F .

Si $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de E , alors on a

$$\Phi_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_B(u_i) = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{in} \end{pmatrix}, \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

En passant aux composantes dans la base B , l'équation paramétrique vectorielle se réécrit donc

$$(1) \quad \boxed{\begin{cases} x_1 = \lambda_1 u_{11} + \dots + \lambda_p u_{p1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 u_{1n} + \dots + \lambda_p u_{pn} \end{cases}, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

Exemple I.6.3. Plaçons-nous dans \mathbb{R}^3 et considérons un sous-espace vectoriel F ayant

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

comme base. Dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 , un vecteur x de composantes x_1, x_2, x_3 appartient à F si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x_1 = 3\lambda \\ x_2 = \lambda + 2\mu \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Equations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel

Considérons tout d'abord deux exemples introductifs.

Exemple I.7.1. Soit le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Vu la section précédente, si on considère la base canonique B de \mathbb{R}^3 formée par les trois vecteurs unitaires e_1, e_2, e_3 , alors les éléments de F sont exactement les vecteurs x de \mathbb{R}^3 dont les composantes x_1, x_2, x_3 dans la base B satisfont les équations paramétriques suivantes,

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \lambda + \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, à tout couple (λ, μ) correspond un élément de F et réciproquement, si un élément de composantes (x_1, x_2, x_3) appartient à F , alors il existe un couple (λ, μ) tel que le système ci-dessus soit satisfait. Une élimination

immédiate¹⁵ montre que les éléments de F sont exactement les vecteurs x dont les composantes x_1, x_2, x_3 dans la base B satisfont l'équation

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Ainsi, cette dernière équation caractérise¹⁶ complètement le fait qu'un vecteur x appartienne à F . On dit que cette équation est une *équation cartésienne* de F .

Exemple I.7.2. L'exemple qui suit montre que plus d'une équation sont parfois nécessaires pour caractériser complètement un sous-espace vectoriel. Soit, dans \mathbb{R}^3 , le sous-espace vectoriel

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Par un raisonnement analogue¹⁷ à celui de l'exemple précédent, on trouve non pas une équation cartésienne mais un *système* de deux équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

¹⁵On peut effectuer directement l'élimination de λ, μ sans recourir à la proposition A.2.4. Néanmoins, en guise d'illustration, si on veut utiliser le résultat A.2.4 rappelé en appendice, on est en présence d'un système en λ, μ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Puisque le rang de la matrice de ce système vaut 2, le système est compatible si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

¹⁶Les vecteurs de F ont des composantes satisfaisant l'équation et réciproquement, tout vecteur dont les composantes satisfont cette équation appartient à F .

¹⁷Ici, on est en présence du système en λ suivant,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice du système vaut 1. Ce système est compatible si et seulement si

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = 1.$$

On peut appliquer le résultat A.2.8. Ceci revient à annuler, par exemple, les deux déterminants bordant l'élément du coin supérieur gauche

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}.$$

Remarque I.7.3. Nous voudrions une fois pour toutes attirer l'attention du lecteur sur le fait que des équations paramétriques ou cartésiennes d'un sous-espace vectoriel dépendent de la base choisie. En effet, dans \mathbb{R}^2 , la droite vectorielle $\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle$ a pour équation $x_1 = x_2$ dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mais a pour équation $x_2 = 0$ dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On voudrait généraliser ces exemples à un sous-espace vectoriel quelconque F d'un espace vectoriel E .

Définition I.7.4. Des équations de la forme

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

sont dites *indépendantes* si les vecteurs $(a_{i,1}; \dots; a_{i,n})$ sont linéairement indépendants (comme éléments de \mathbb{R}^n).

Proposition I.7.5. Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n . Un sous-espace vectoriel F de dimension p est caractérisé par $n - p$ équations linéaires homogènes indépendantes de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Ces équations sont appelées *équations cartésiennes* de F (dans la base B).

Démonstration. Supposons que u_1, \dots, u_p forment une base d'un sous-espace vectoriel F de dimension $p < n$,

$$F = \rangle u_1, \dots, u_p \langle.$$

Reprenons les équations paramétriques de F dans la base B données en (1). Un vecteur $x \in E$ appartient à F si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que (1) soit satisfait. Nous voulons *éliminer* les paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Ceci revient à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{pn} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est compatible. Puisque les vecteurs u_1, \dots, u_p sont linéairement indépendants, la matrice du système est de rang p . Au vu de la proposition A.2.4 donnée en appendice, le système est compatible si et seulement si

$$(2) \quad \text{rg} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{p1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{pn} & x_n \end{pmatrix} = p.$$

Par définition du rang, la matrice A du système contient une sous-matrice carrée A' de dimension p et de déterminant α non nul. Pour simplifier

l'écriture, supposons que cette sous-matrice A' soit constituée des p premières lignes de A . Ainsi, par la proposition A.2.8, pour satisfaire (2), il est nécessaire et suffisant d'annuler les déterminants des matrices carrées de dimension $p + 1$ bordant A' , i.e.,

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{p1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{1p} & \cdots & u_{pp} & x_p \\ u_{1,p+1} & \cdots & u_{p,p+1} & x_{p+1} \end{vmatrix} = 0, \dots, \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{p1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{1p} & \cdots & u_{pp} & x_p \\ u_{1n} & \cdots & u_{pn} & x_n \end{vmatrix} = 0.$$

L'annulation de ces $n - p$ déterminants fournit un système de $n - p$ équations linéaires homogènes caractérisant les éléments de F . Il est clair que ces équations sont indépendantes puisque leurs coefficients respectifs sont

$$\underbrace{(*, \dots, *)}_p, \underbrace{(\alpha, 0, 0, \dots, 0)}_{n-p}, (*, \dots, *, 0, \alpha, 0, \dots, 0), \dots, (*, \dots, *, 0, 0, \dots, 0, \alpha).$$

Réciproquement¹⁸, l'ensemble des solutions d'un système de $n - p$ équations linéaires homogènes indépendantes¹⁹ à n inconnues

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0, \quad i = 1, \dots, n - p$$

est un sous-espace vectoriel de dimension $n - (n - p) = p$. ■

Remarque I.7.6. L'algèbre linéaire nous apprend qu'il suffit, pour caractériser un sous-espace vectoriel, de considérer des équations indépendantes en nombre maximum. Insistons sur le fait que le raisonnement ci-dessus nous montre que le nombre d'équations cartésiennes (indépendantes) nécessaires pour caractériser un sous-espace vectoriel F de dimension p dans un espace vectoriel E de dimension n est exactement

$$(3) \quad \boxed{\dim E - \dim F = n - p.}$$

Définition I.7.7. Soit E un espace vectoriel de dimension n . Si F est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on dit que F est une *droite vectorielle*. Si $\dim F = 2$, alors F est un *plan vectoriel*. Enfin, si $\dim F = n - 1$, alors on dit que F est un *hyperplan vectoriel*.

Ainsi, une droite vectorielle est caractérisée par exactement $n - 1$ équations cartésiennes et un plan vectoriel par $n - 2$ équations. Enfin, un hyperplan est caractérisé par une unique équation de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

avec les a_i non tous nuls (sinon l'équation ne serait pas indépendante).

¹⁸cf. le théorème de structure des solutions d'un système d'équations linéaires.

¹⁹Puisqu'on a $n - p$ équations indépendantes, le rang du système vaut $n - p$.

8. Cas de la dimension 2

Si E est un espace vectoriel de dimension 2, on peut envisager des sous-espaces vectoriels de dimension 0, 1 et 2. Le seul cas intéressant (différent de $\{0\}$ ou de E tout entier) est celui de la dimension 1.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 1. Il s'agit donc d'une droite vectorielle (mais aussi d'un hyperplan puisque E est de dimension 2). Ainsi, il existe un vecteur u non nul de E tel que

$$F = \rangle u \langle = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La droite vectorielle F possède comme équation paramétrique

$$x \in F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda u.$$

Si $B = (b_1, b_2)$ est une base de E , alors en passant aux composantes dans cette base, on a

$$\begin{cases} x_1 = \lambda u_1 \\ x_2 = \lambda u_2 \end{cases}.$$

En éliminant²⁰ le paramètre λ , on trouve comme équation cartésienne

$$u_2 x_1 - u_1 x_2 = 0.$$

Remarque I.8.1. La section précédente (cf. la formule (3)) nous a montré qu'une seule équation linéaire homogène indépendante suffit pour caractériser F dans une base B . Si cette équation s'écrit

$$(4) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0,$$

alors on s'aperçoit que le vecteur de composantes $(\alpha_2, -\alpha_1) \neq (0, 0)$ appartient à F . On peut refaire tout le raisonnement précédent avec $(u_1, u_2) = (\alpha_2, -\alpha_1)$ et ainsi retrouver l'équation (4).

Exemple I.8.2. Soient les vecteurs de \mathbb{R}^2

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

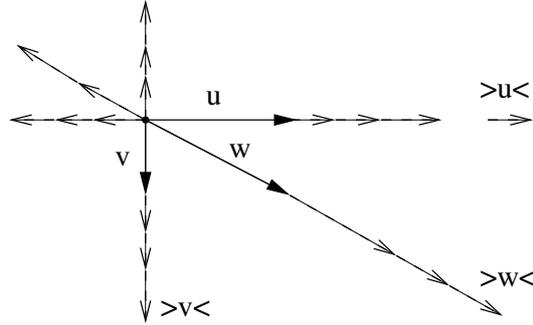
Dans la base canonique, la droite vectorielle $\rangle u \langle$ a pour équation cartésienne $x_2 = 0$, $\rangle v \langle$ a pour équation $x_1 = 0$ et $\rangle w \langle$ a pour équation $x_1 + 2x_2 = 0$. Ces droites vectorielles sont représentées schématiquement à la figure I.8.

9. Cas de la dimension 3

Dans la suite, on s'autorisera, par commodité d'écriture, à représenter un élément de \mathbb{R}^n indifféremment par un vecteur ligne ou colonne.

Si E est un espace vectoriel de dimension 3, les cas intéressants de sous-espaces vectoriels sont ceux de dimension 1 ou 2.

²⁰L'élimination est toujours possible car $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$.

FIGURE I.8. Droites vectorielles de \mathbb{R}^2 .

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 1. Il s'agit donc d'une droite vectorielle. Ainsi, il existe un vecteur u non nul de E tel que

$$F = \rangle u \langle = \{ \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

La droite vectorielle F possède comme équation paramétrique

$$x \in F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda u.$$

Si $B = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E , alors en passant aux composantes dans cette base, on a

$$\begin{cases} x_1 = \lambda u_1 \\ x_2 = \lambda u_2 \\ x_3 = \lambda u_3 \end{cases}.$$

Puisque u est non nul, au moins un des u_i est différent de 0. Pour simplifier, supposons ici $u_1 \neq 0$. L'élimination donne

$$\begin{cases} u_2 x_1 - u_1 x_2 = 0 \\ u_3 x_1 - u_1 x_3 = 0 \end{cases}$$

et ainsi, en dimension 3, une droite vectorielle est caractérisée par deux équations. Ces dernières sont bien indépendantes car les vecteurs $(u_2, -u_1, 0)$ et $(u_3, 0, -u_1)$ sont linéairement indépendants. On obtient un résultat analogue si u_2 ou u_3 diffèrent de 0.

Remarque I.9.1. Soit B une base de E . Puisqu'ici (3) donne

$$\dim E - \dim F = 3 - 1 = 2,$$

deux équations indépendantes sont nécessaires pour caractériser une droite vectorielle. Si ces équations sont

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

alors on vérifie aisément que

$$(5) \quad (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3, \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$$

satisfait simultanément les deux équations. Il s'agit donc des composantes d'un vecteur appartenant à F . Remarquons que les composantes de (5)

sont les cofacteurs (aussi appelés mineurs algébriques) correspondants à la première ligne de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Puisque $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont linéairement indépendants, le vecteur (5) est non nul et constitue donc une base de F . Par conséquent, on peut refaire le même raisonnement que ci-dessus avec (u_1, u_2, u_3) égal à (5).

Exemple I.9.2. Soit le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de \mathbb{R}^3 . La droite vectorielle $\rangle u \langle$ a pour équation paramétrique, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

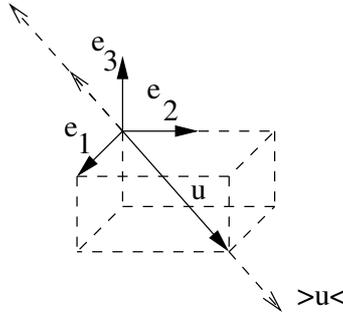


FIGURE I.9. Droite vectorielle de \mathbb{R}^3 .

Par exemple, cette droite aurait pu aussi être donnée par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

En calculant les cofacteurs de la première ligne de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

on trouve $(2, 4, -2)$ qui est un multiple de u .

Il nous reste à considérer le cas d'un sous-espace vectoriel de dimension 2. Il s'agit d'un plan vectoriel (c'est aussi un hyperplan vectoriel puisque nous sommes dans un espace de dimension 3).

Ce plan vectoriel F peut être donné comme enveloppe linéaire de deux vecteurs linéairement indépendants u et v . Ainsi, un vecteur x appartient à F si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que

$$x = \lambda u + \mu v.$$

De là, on peut rechercher une équation paramétrique ou cartésienne de F dans une base B . (Il suffit de passer aux composantes des vecteurs x, u, v dans la base B .)

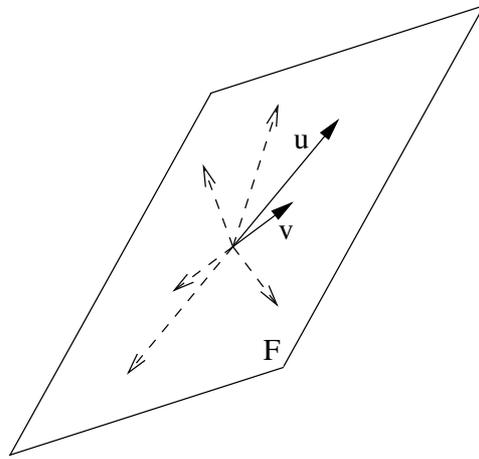


FIGURE I.10. Un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 .

En effet, l'élimination des paramètres λ et μ dans le système

$$\begin{cases} x_1 = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ x_2 = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ x_3 = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

fournit la condition

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

qui se réexprime sous forme d'une équation linéaire homogène ayant au moins un coefficient non nul²¹. Cette condition traduit en particulier le fait que le vecteur de composantes (x_1, x_2, x_3) est combinaison linéaire de u et v .

²¹C'est une conséquence du fait que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.

Exemple I.9.3. Soient les vecteurs de \mathbb{R}^3

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le plan vectoriel

$$F = \langle u, v \rangle = \{ \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

a pour équation paramétrique dans la base canonique de \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\mu \\ x_3 = \lambda + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

L'élimination immédiate des paramètres fournit une équation cartésienne du plan vectoriel F ,

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Proposition I.9.4. *Dans un espace vectoriel E de dimension 3, deux plans vectoriels distincts se coupent selon une droite vectorielle.*

Démonstration. Supposons que les deux plans ont pour équation cartésienne respective dans une base de E ,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

et

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0.$$

Puisque les deux plans sont distincts, les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont linéairement indépendants²². Les vecteurs $x \in E$ dont les composantes satisfont

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

constituent donc une droite vectorielle (c'est une conséquence de la proposition I.7.5).

■

Proposition I.9.5. *Dans un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base B , un plan vectoriel contient la droite vectorielle d'équations cartésiennes*

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

si et seulement si ce plan a pour équation cartésienne

$$\lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

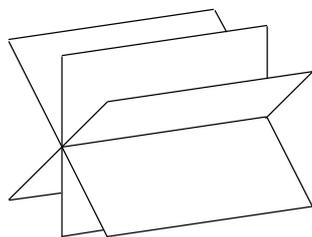


FIGURE I.11. Plans vectoriels contenant une droite vectorielle.

Démonstration. Si un plan vectoriel a pour équation

$$\lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

alors il est clair qu'il contient la droite vectorielle (6).

Réciproquement, si un plan vectoriel d'équation cartésienne

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0$$

contient la droite vectorielle (6), alors les composantes des éléments de la droite vectorielle sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0 \end{cases} .$$

Or, deux équations indépendantes sont suffisantes pour caractériser une droite. Ceci montre que $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ est combinaison linéaire des deux vecteurs linéairement indépendants $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. ■

Corollaire I.9.6. *Dans un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base B , trois plans d'équation cartésienne respective*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

se coupent selon une même droite vectorielle si et seulement si les vecteurs $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ sont linéairement dépendants.

Démonstration. Supposons (a_{11}, a_{12}, a_{13}) et (a_{21}, a_{22}, a_{23}) linéairement indépendants. En vertu du théorème précédent, la droite vectorielle déterminée par les deux premiers plans vectoriels est incluse dans le troisième plan vectoriel si et seulement si (a_{31}, a_{32}, a_{33}) est combinaison linéaire de (a_{11}, a_{12}, a_{13}) et (a_{21}, a_{22}, a_{23}) . ■

²²Sinon, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ seraient multiples l'un de l'autre et l'équation $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ serait équivalente à l'équation $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$. Les deux plans seraient dès lors confondus.

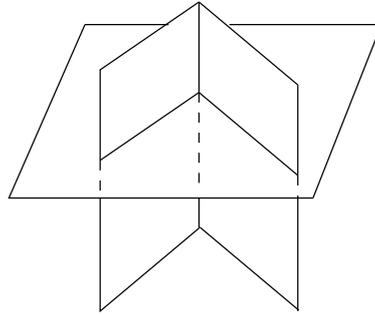


FIGURE I.12. Trois plans ne se coupant pas suivant une même droite vectorielle.

CHAPITRE II

Espace affiné modélisé sur un espace vectoriel réel

1. Définitions

Si on se donne un espace vectoriel E , on peut munir un ensemble quelconque \mathcal{A} d'une structure particulière (structure d'espace affiné) lorsqu'on définit sur \mathcal{A} une opération de translation par un vecteur de E . Précisément, on a la définition suivante.

Définition II.1.1. Soit E un espace vectoriel réel et \mathcal{A} un ensemble non vide. On définit une opération t de *translation*

$$t : \mathcal{A} \times E \rightarrow \mathcal{A} : (P, v) \mapsto P + v$$

d'un élément P de \mathcal{A} , par un vecteur v de E , en imposant les conditions suivantes :

- (1) pour tout $P \in \mathcal{A}$, $P + 0 = P$,
- (2) pour tous $P \in \mathcal{A}$ et $v, w \in E$, $(P + v) + w = P + (v + w)$,
- (3) pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$, il existe un unique $v \in E$ tel que $Q = P + v$.

On dit que, muni de cette opération, \mathcal{A} est un *espace affiné* (modélisé sur l'espace vectoriel E). Les éléments de \mathcal{A} sont appelés *points*. Si $P \in \mathcal{A}$ et $v \in E$, on parle parfois de la *somme* du point P et du vecteur v au lieu de la translation de P par v .

Remarque II.1.2. Voici quelques conséquences de la définition.

- La première condition de la définition résulte des deux autres. En effet, au vu de (3), si $P \in \mathcal{A}$, alors il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $P + u = P$. Si on ajoute aux deux membres le vecteur nul de E , il vient

$$(P + u) + 0 = P + 0.$$

Au vu de (2), le premier membre se réécrit

$$(P + u) + 0 = P + (u + 0) = P + u$$

et ainsi, $P + u = P + 0 = P$. De l'unicité de u , on conclut que $u = 0$.

- La condition (3) entraîne que, si il existe $P \in \mathcal{A}$ tel que $P + v = P + w$, alors $v = w$.

- Soient $P, Q \in \mathcal{A}$, $v \in E$. Si $P + v = Q + v$, alors $P = Q$. En effet, on peut ajouter aux deux membres le vecteur $-v$, opposé de v . On trouve alors

$$P = P + \underbrace{(v - v)}_0 = (P + v) + (-v) = (Q + v) + (-v) = Q + \underbrace{(v - v)}_0 = Q.$$

- Dans la condition (3), puisque le vecteur v est univoquement¹ déterminé par P et Q , on le notera \overrightarrow{PQ} . En particulier, pour tout point $P \in \mathcal{A}$, $P + 0 = P = P + \overrightarrow{PP}$ et donc $\overrightarrow{PP} = 0$.
- Bien évidemment, la condition (2) permet de donner un sens à une expression comme

$$\begin{aligned} P + u_1 + \cdots + u_r &= (\cdots ((P + u_1) + u_2) + \cdots) + u_r \\ &= P + (u_1 + \cdots + u_r) \end{aligned}$$

où P est un point de \mathcal{A} et les u_i des vecteurs de E .

Exemple II.1.3. Dans la définition II.1.1, prenons $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ et $E = \mathbb{R}^2$. L'ensemble \mathbb{R}^2 peut être vu comme un espace affine modelé sur \mathbb{R}^2 (ce dernier ensemble vu, cette fois, comme espace vectoriel). Dans ce cadre, l'opération de translation est simplement définie par l'addition de deux éléments de \mathbb{R}^2 . Ainsi, on peut non seulement voir \mathbb{R}^2 comme un espace vectoriel mais aussi comme un ensemble de points muni d'une structure affine. Ceci est schématisé symboliquement par la figure suivante.

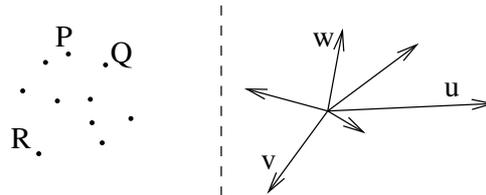


FIGURE II.1. \mathbb{R}^2 : espace affine ou espace vectoriel.

Autrement dit, selon le contexte, un élément de \mathbb{R}^2 est considéré comme un point ou un vecteur. L'espace affine \mathbb{R}^2 est souvent appelé *plan affine*. Soient les points

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il vient $A + u = B$, $B + v = C$, $A + u + v = C$. Une représentation est donnée à la figure II.2.

¹L'univocité du vecteur v permet de fournir une notation non ambiguë.

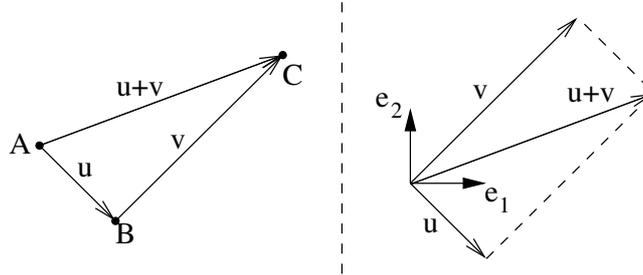


FIGURE II.2. \mathbb{R}^2 : espace affin et espace vectoriel.

Bien évidemment, tout ceci se généralise au cas de \mathbb{R}^n et en particulier à \mathbb{R}^3 qui possède également une structure d'espace affin.

Proposition II.1.4. Soient $P, Q \in \mathcal{A}$. On a

$$\boxed{-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}.}$$

Démonstration. Par définition, \overrightarrow{PQ} (resp. \overrightarrow{QP}) est l'unique vecteur tel que $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ (resp. $Q + \overrightarrow{QP} = P$). Ainsi,

$$P + 0 = P = Q + \overrightarrow{QP} = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QP} = P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}).$$

Et donc

$$0 = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP},$$

ce qui signifie que le vecteur \overrightarrow{QP} est l'opposé de \overrightarrow{PQ} noté $-\overrightarrow{PQ}$. ■

Proposition II.1.5 (Relation de Chasles). Soient $P, Q, R \in \mathcal{A}$. On a

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.}$$

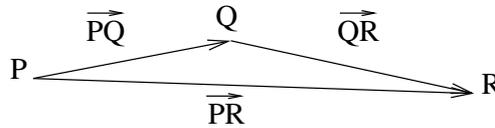


FIGURE II.3. Relation de Chasles

Démonstration. On a $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ et $Q + \overrightarrow{QR} = R$. Ainsi,

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R$$

et donc, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ est l'unique vecteur réalisant la translation de P à R . ■

Corollaire II.1.6. Pour tous $P, Q, R \in \mathcal{A}$, on a

$$\boxed{\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QP}.}$$

Démonstration. C'est immédiat. ■

Nous savons que si \mathcal{A} est un espace affine modelé sur un espace vectoriel E , alors pour tous $P, R \in \mathcal{A}$, il existe un unique vecteur \overrightarrow{PR} tel que

$$P + \overrightarrow{PR} = R.$$

Nous posons dès lors

$$R - P = \overrightarrow{PR}.$$

De cette manière, nous venons de donner un sens à une somme particulière (à savoir la différence) de deux points de \mathcal{A} . Autrement dit, $R - P$ est une écriture symbolique du vecteur \overrightarrow{PR} .

2. Vecteurs liés

Définition II.2.1. Soit P un point d'un espace affine \mathcal{A} . On notera $\vec{\mathcal{A}}$ l'espace vectoriel sous-jacent à \mathcal{A} . Un couple² (P, Q) de points de \mathcal{A} est appelé *vecteur lié* en P .

Il est clair que l'application

$$(P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{A}}$$

est une bijection entre l'ensemble des vecteurs liés en P et $\vec{\mathcal{A}}$. De cette manière, on peut définir la somme de deux vecteurs liés en P par

$$(P, Q) + (P, R) = (P, P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$$

et la multiplication d'un vecteur lié en P par un scalaire λ ,

$$\lambda(P, Q) = (P, P + \lambda\overrightarrow{PQ}).$$

Il est facile de vérifier que, muni de ces deux opérations, l'ensemble \mathcal{A}_P des vecteurs liés en P possède une structure d'espace vectoriel (isomorphe à $\vec{\mathcal{A}}$).

Définition II.2.2. Considérons l'ensemble des vecteurs liés, c'est-à-dire le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, et définissons, au sein de cet ensemble, une relation d'*équipollence* de la manière suivante. Les vecteurs liés (P, Q) et (R, S) sont *équipollents* si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.

Exemple II.2.3. Voici une illustration de vecteurs équipollents du plan affine \mathbb{R}^2 . Soient les points

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

²Pour rappel, un couple est une paire ordonnée.

Comme nous le verrons, ce choix sera tout à fait cohérent, cf. la remarque II.3.11

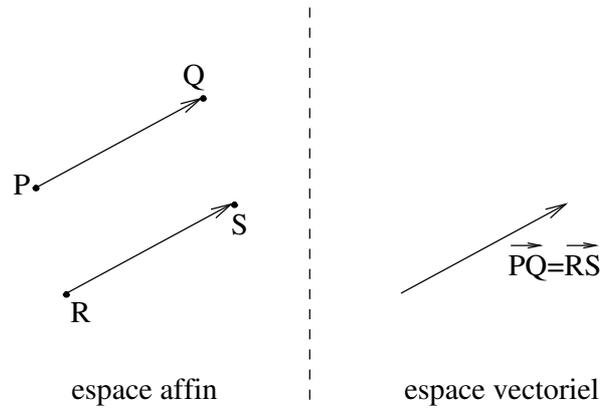


FIGURE II.4. Vecteurs liés équipollents.

Une fois encore, rappelons que les éléments de \mathbb{R}^2 sont, suivant le contexte, interprétés comme des points du plan affín ou des vecteurs de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Les vecteurs liés (P, Q) et (R, S) sont équipollents car

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = S - R = \overrightarrow{RS}.$$

Définition II.2.4. Quatre points A, B, C, D d'un espace affín forment un *parallélogramme* si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

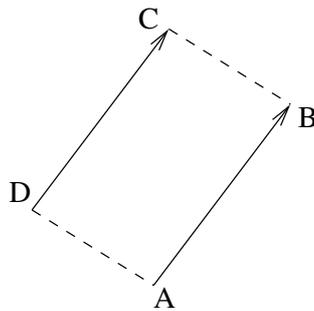


FIGURE II.5. Un parallélogramme

L'addition de vecteurs liés en P suit la "règle du parallélogramme". Si

$$(P, R) + (P, Q) = (P, S),$$

alors cela signifie que $P + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} = S$ et donc que

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ ce qui signifie que $PQSR$ est un parallélogramme.

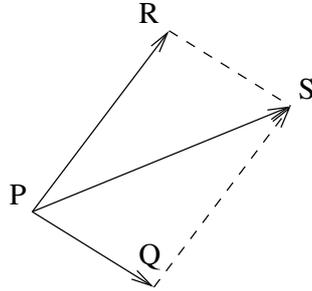


FIGURE II.6. La règle du parallélogramme.

3. Combinaisons affines

Nous allons voir comment généraliser une opération comme $Q - P$ à un nombre arbitraire de points de \mathcal{A} . Notons dès à présent qu'on ne donne un sens à une somme de points d'un espace affine que si la somme des coefficients vaut 1 ou 0.

Dans la suite, \mathcal{A} est un espace affine modelé sur un espace vectoriel E .

Proposition II.3.1. Soient P_1, \dots, P_n des points de \mathcal{A} . Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, alors le point

$$Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

est indépendant du choix de Q .

Démonstration. Soient Q, R deux points de \mathcal{A} . On a

$$\begin{aligned} & Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} \\ &= Q + \lambda_1 (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_1}) + \dots + \lambda_n (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_n}) \\ &= Q + \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{=1} \overrightarrow{QR} + \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n} \\ &= R + \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n}. \end{aligned}$$

■

Définition II.3.2. Grâce à la proposition II.3.1, on peut définir la *combinaison affine* des points P_1, \dots, P_n de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ par

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

pour un point quelconque Q de \mathcal{A} . On emploie parfois la terminologie *barycentre* des points P_1, \dots, P_n pour les poids $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dans le cas particulier où tous les coefficients sont égaux,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n},$$

on utilise aussi la terminologie *centre de gravité* ou *isobarycentre*. L'isobarycentre des points P, Q s'appelle le *milieu* du segment $[P, Q]$.

Exemple II.3.3. Plaçons-nous dans le plan affine \mathbb{R}^2 . Soient A et B deux points distincts. Représentons tout d'abord le point

$$C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = P + \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PB} = P' + \frac{1}{3}\overrightarrow{P'A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{P'B}.$$

En particulier, puisque la proposition précédente stipule que le point obtenu

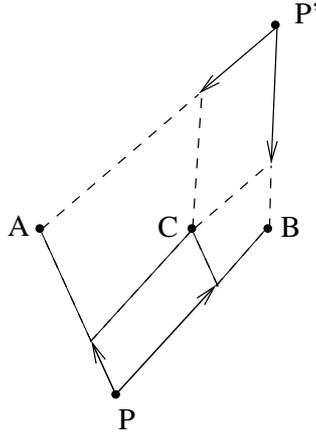


FIGURE II.7. Combinaison affine de deux points.

est indépendant du choix de P , on peut écrire (en prenant $P = A$),

$$C = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Voici un autre exemple; soit $D = 2A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C$ représenté ci-dessous.

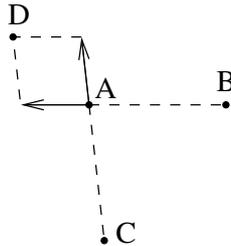


FIGURE II.8. Combinaison affine de trois points.

Corollaire II.3.4. Soient P_1, \dots, P_n des points de \mathcal{A} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. La combinaison affine $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ est l'unique point Q tel que $\lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} = 0$.

Démonstration. Si $Q = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$, alors

$$Q = Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

et donc $\lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} = 0$.

■

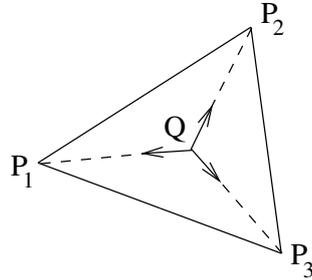


FIGURE II.9. Centre de gravité de trois points.

Exemple II.3.5. Soient deux masses A et B de respectivement 1 et 2 kg supposées ponctuelles. Le centre de masse Q ne se trouve pas au milieu



FIGURE II.10. Centre de masse.

du segment $[A, B]$ mais est tel que $\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} = 0$.

Proposition II.3.6 (Associativité du barycentre). Soient m et n des entiers positifs tels que $m < n$, P_1, \dots, P_n des points de \mathcal{A} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Si on pose

$$G_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_m$$

et

$$G_2 = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_{m+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_n,$$

alors

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) G_1 + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) G_2.$$

Démonstration. Soit Q un point quelconque. Il vient

$$\begin{aligned} & \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \\ = & Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{QP_m} + \lambda_{m+1} \overrightarrow{QP_{m+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{QP_m} \\
 &= \lambda_1 (\overrightarrow{QG_1} + \overrightarrow{G_1P_1}) + \dots + \lambda_m (\overrightarrow{QG_1} + \overrightarrow{G_1P_m}) \\
 &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \overrightarrow{QG_1} + \lambda_1 \overrightarrow{G_1P_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{G_1P_m} \\
 &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \overrightarrow{QG_1} \\
 &+ (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} \overrightarrow{G_1P_1} + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} \overrightarrow{G_1P_m}}_{=0} \right)
 \end{aligned}$$

car on a utilisé, à la dernière ligne, la définition de G_1 et le corollaire II.3.4. En procédant de la même manière avec $\lambda_{m+1} \overrightarrow{QP_{m+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$, on trouve

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n &= Q + (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \overrightarrow{QG_1} + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{QG_2} \\
 &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) G_1 + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) G_2.
 \end{aligned}$$

■

Remarque II.3.7. La proposition précédente permet le calcul du barycentre d'un ensemble de points en partitionnant cet ensemble en deux sous-ensembles. En procédant de proche en proche, on peut généraliser ce résultat à une partition quelconque de l'ensemble de points de départ.

Exemple II.3.8. Appliquons la proposition précédente au cas de 3 points A, B, C et D représentés à la figure II.11 pour calculer la combinaison affine

$$M = 2A + 3B - 5C + D.$$

On considère tout d'abord les points A et B et le point

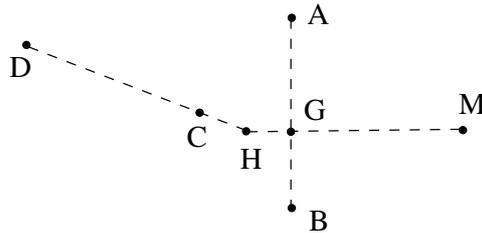


FIGURE II.11. Calcul d'une combinaison affine de points.

$$G = \frac{2}{5}A + \frac{3}{5}B.$$

Ensuite, on considère les points C et D et le point

$$H = \frac{5}{4}C - \frac{1}{4}D.$$

Enfin, pour M , il vient

$$M = 5G - 4H.$$

Proposition II.3.9. Soient P_1, \dots, P_n des points de \mathcal{A} . Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mathbf{0}$, alors le **vecteur**

$$\lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

est indépendant du choix de Q .

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de la proposition précédente. Soient Q, R deux points de \mathcal{A} . On a

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} \\ = & \lambda_1 (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_1}) + \dots + \lambda_n (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_n}) \\ = & \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{=0} \overrightarrow{QR} + \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n} \\ = & \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n}. \end{aligned}$$

■

Définition II.3.10. Le vecteur dont il est question dans la proposition précédente est noté

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n.$$

Remarque II.3.11. La notation $R - P = \overrightarrow{PR}$ définie précédemment est cohérente avec cette dernière proposition puisque nous avons vu (cf. corollaire II.1.6) que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QP}$.

4. Variétés affines

Définition II.4.1. Soit \mathcal{A} un espace affiné modélé sur un espace vectoriel réel E . Un sous-ensemble \mathcal{V} de \mathcal{A} est une *variété affine* (encore appelé *sous-espace affine*) s'il existe un point P de \mathcal{A} et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{V} = P + F = \{P + u \mid u \in F\}.$$

On dit que F est la *direction* ou encore le *sous-(espace) vectoriel directeur* de la variété affine \mathcal{V} .

Remarque II.4.2. Puisque $P = P + 0$, le point P appartient à toute variété affine passant par P . En effet, tout sous-espace vectoriel contient toujours le vecteur nul.

Exemple II.4.3. Considérons l'espace affine \mathbb{R}^3 . Soit $\vec{\pi}$ un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . Soient A et B deux points de \mathbb{R}^3 . Les ensembles de points $A + \vec{\pi}$ et $B + \vec{\pi}$ sont des variétés affines de \mathbb{R}^3 . Nous avons la représentation schématique suivante.

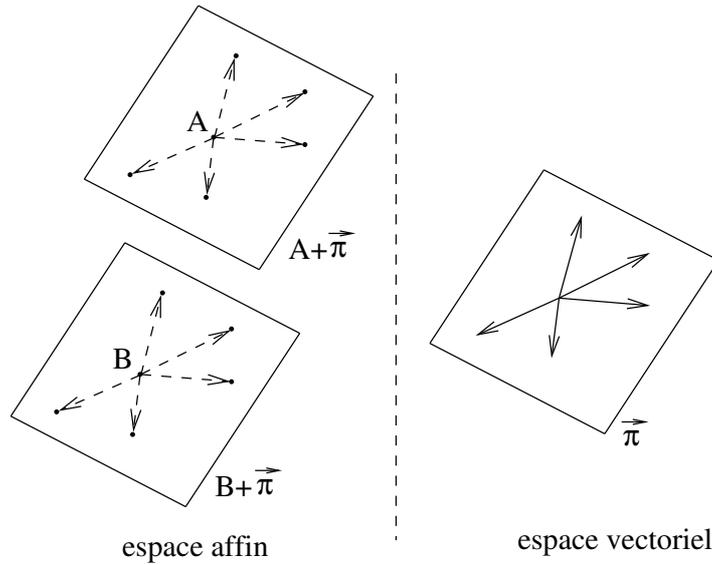


FIGURE II.12. Un exemple de variété affine.

Exemple II.4.4. Voici deux exemples (triviaux) de variétés affines.

- ▶ Un point $P \in \mathcal{A}$ est une variété affine. En effet, si on considère $\{0\}$ comme sous-vectoriel directeur, on a $\{P\} = P + \{0\}$.
- ▶ Soient E l'espace vectoriel sur lequel est construit l'espace affine \mathcal{A} et P un point de \mathcal{A} . On a

$$\mathcal{A} = P + E$$

et dès lors, l'espace affine tout entier est lui-même une variété affine.

Les trois points suivants précisent les caractéristiques d'une variété affine.

◊.1) Le point à partir duquel on définit une variété affine appartient à celle-ci et on peut le remplacer par n'importe quel autre point de la variété affine.

Proposition II.4.5. Soit une variété affine \mathcal{V} de la forme $P + F$. Pour tout point $P' \in \mathcal{V}$, on a

$$\mathcal{V} = P' + F.$$

Démonstration. Si $P' \in \mathcal{V}$, alors il existe un vecteur v_0 de F tel que $P' = P + v_0$. Il vient³

$$\begin{aligned} P' + F &= \{P' + v : v \in F\} \\ &= \{(P + v_0) + v : v \in F\} \\ &= \{P + (v_0 + v) : v \in F\} = P + F. \end{aligned}$$

■

◇.2) On pourrait penser *a priori* qu'une variété affine puisse être définie par deux sous-espaces vectoriels distincts. Comme le montre la proposition suivante, il n'en est rien et ceci justifie le fait qu'on parle de la direction d'une variété affine (ou du sous-vectoriel directeur).

Proposition II.4.6. Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels et P un point de \mathcal{A} . Si $P + F = P + F'$, alors $F = F'$.

Démonstration. C'est évident.

■

◇.3) Nous venons de voir que le sous-vectoriel directeur d'une variété affine était unique. On peut le décrire de la manière suivante.

Corollaire II.4.7. Soient \mathcal{V} une variété affine et $P \in \mathcal{V}$. L'ensemble

$$\vec{\mathcal{V}} = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in \mathcal{V}\}$$

est le sous-vectoriel directeur de \mathcal{V} .

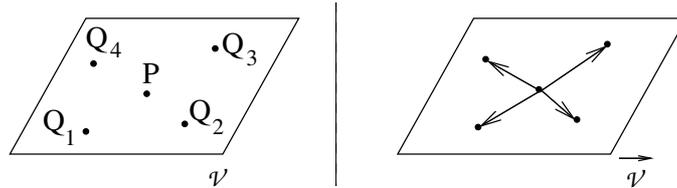


FIGURE II.13. Sous-vectoriel directeur d'une variété affine.

Démonstration. Supposons que P est un point de \mathcal{V} et que la variété affine soit de la forme $P + F$. Nous devons montrer que $F = \vec{\mathcal{V}}$.

Si $Q \in \mathcal{V}$, alors il existe $u \in F$ tel que $Q = P + u$. On a donc $u = \overrightarrow{PQ}$ et par suite, $\overrightarrow{PQ} \in F$ (ainsi, $\vec{\mathcal{V}} \subset F$).

Réciproquement, si $v \in F$, alors le point $Q = P + v$ est un point de \mathcal{V} et $v = \overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{V}}$ (ainsi, $F \subset \vec{\mathcal{V}}$).

³On a utilisé l'argument suivant : si v_0 est un vecteur du sous-espace vectoriel F , alors $v_0 + F = \{v_0 + v : v \in F\} = F$. Il est clair que, quels que soient $v_0, v \in F$, puisque F est un sous-espace vectoriel, $v_0 + v \in F$ et donc $v_0 + F \subset F$. Montrons l'autre inclusion. Soit $v \in F$. Puisque $v_0 \in F$, son opposé $-v_0$ appartient aussi à F , ainsi $v = v_0 + (v - v_0) \in v_0 + F$ et $F \subset v_0 + F$.

■

Voici à présent un exemple fondamental de variété affine.

Définition II.4.8. Soient P, Q deux points distincts de \mathcal{A} . La droite PQ est la variété affine définie par

$$P + \overrightarrow{PQ} = P + \{\lambda \overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

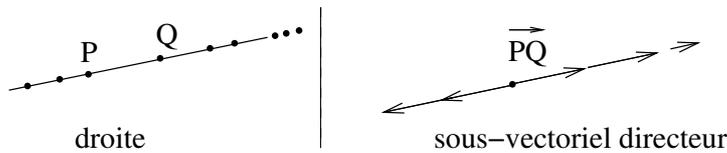


FIGURE II.14. Une droite.

Remarque II.4.9. Il résulte de la définition que PQ est l'ensemble des combinaisons affines de P et de Q ,

$$PQ = \{(1 - \lambda)P + \lambda Q \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

En effet, un point A appartient à PQ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = P + \lambda \overrightarrow{PQ} = (1 - \lambda)P + \lambda Q.$$

En particulier, le nombre réel λ associé à un point A de PQ est unique. En effet, supposons que

$$A = P + \lambda \overrightarrow{PQ} = P + \mu \overrightarrow{PQ}.$$

Alors $\lambda \overrightarrow{PQ} = \mu \overrightarrow{PQ}$ et puisque P et Q sont distincts, on obtient $\lambda = \mu$.

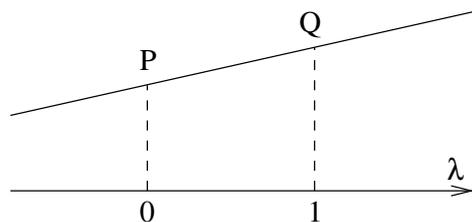


FIGURE II.15. A chaque point de PQ correspond un unique réel λ .

Définition II.4.10. On définit le *segment* $[P, Q]$ comme l'ensemble des points de la forme

$$\{(1 - \lambda)P + \lambda Q \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Proposition II.4.11. Soient P, Q des points distincts de \mathcal{A} .

- i) Un point X appartient à PQ si et seulement si \overrightarrow{PX} est un multiple de \overrightarrow{PQ} .

ii) Si A et B sont deux points distincts de PQ , alors

$$PQ = AB.$$

Démonstration. Pour i), un point X appartient à PQ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = P + \lambda \overrightarrow{PQ}$. D'où la conclusion puisque $X = P + \overrightarrow{PX}$.

Passons au second point. Le vecteur \overrightarrow{AB} est non nul et appartient au sous-vectoriel directeur de la droite (c'est une conséquence du corollaire II.4.7). Ainsi, \overrightarrow{AB} est un multiple (non nul) de \overrightarrow{PQ} . De là, on trouve que

$$\overrightarrow{PQ} \langle = \rangle \overrightarrow{AB} \langle .$$

Au vu des propositions II.4.5 et II.4.6,

$$P + \overrightarrow{PQ} \langle = P + \overrightarrow{AB} \langle = A + \overrightarrow{AB} \langle .$$

■

Proposition II.4.12. ⁴ Si \mathcal{V} est une variété affine de \mathcal{A} , alors toute combinaison affine de points de \mathcal{V} est un point de \mathcal{V} . En particulier, toute variété affine contient les droites passant par deux quelconques de ses points.

Démonstration. Soit \mathcal{V} , une variété affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. Soient $n \geq 2$, P_1, \dots, P_n des points de \mathcal{V} et

$$Q = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \quad \text{avec} \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Il vient, pour tout point $M \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{MQ} = \lambda_1 \overrightarrow{MP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{MP_n}.$$

En particulier, si $M = P_1$, alors

$$\overrightarrow{P_1Q} = \lambda_1 \overrightarrow{P_1P_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{P_1P_n}.$$

Puisque les points P_1, \dots, P_n appartiennent à \mathcal{V} , les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_i}$ appartiennent à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. De plus, $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ étant un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire d'éléments de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ est encore un élément de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. On en conclut que $\overrightarrow{P_1Q}$ appartient à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et donc $Q = P_1 + \overrightarrow{P_1Q}$ appartient à \mathcal{V} .

■

Définition II.4.13. On appelle *dimension* d'une variété affine \mathcal{V} , la dimension de son sous-vectoriel directeur et on la note $\dim \mathcal{V}$. Si la variété affine \mathcal{V} est de la forme $P + F$ avec $\dim F = 1$ (resp. $\dim F = 2$), alors on dit que \mathcal{V} est une *droite affine* ou simplement *droite* (resp. un *plan affiné* ou simplement *plan*). Si l'espace vectoriel sur lequel est construit l'espace affiné \mathcal{A} est de dimension n , alors une variété affine de dimension $n - 1$ s'appelle un *hyperplan affiné*.

⁴On peut même montrer qu'un ensemble \mathcal{V} est une variété affine si et seulement si il contient les droites passant par deux quelconques de ses points.

5. Intersection et parallélisme

Proposition II.5.1. *L'intersection de deux variétés affines, si elle n'est pas vide est une variété affine.*

Démonstration. Soient \mathcal{V} et \mathcal{V}' deux variétés affines. Supposons que $P \in \mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$. L'intersection des espaces vectoriels $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{V}'}$ est encore un sous-espace vectoriel⁵. Ainsi, $P + (\vec{\mathcal{V}} \cap \vec{\mathcal{V}'})$ est une variété affine contenant exactement les points de $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$. En effet, si $v \in \vec{\mathcal{V}} \cap \vec{\mathcal{V}'}$, alors $P+v$ appartient à $P + \vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$ mais aussi à $P + \vec{\mathcal{V}'} = \mathcal{V}'$. Inversement, si Q appartient à $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$, alors \vec{PQ} appartient à $\vec{\mathcal{V}} \cap \vec{\mathcal{V}'}$ et donc $Q = P + \vec{PQ}$ appartient à $P + (\vec{\mathcal{V}} \cap \vec{\mathcal{V}'})$. ■

Définition II.5.2. Deux variétés affines $P + F$ et $P' + F'$ sont *parallèles* si l'un des sous-vectoriels directeurs qui les définissent est inclus dans l'autre⁶, i.e., si $F \subset F'$ ou $F' \subset F$. Si les variétés affines \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont parallèles, on note $\mathcal{V} \parallel \mathcal{V}'$.

Proposition II.5.3. *On a les propositions suivantes.*

- i) *Si deux variétés affines parallèles ont un point en commun, alors l'une est incluse dans l'autre.*
- ii) *Si deux variétés affines parallèles ont la même dimension, alors elles possèdent le même sous-espace vectoriel directeur. En particulier, si elles ont un point en commun, elles coïncident.*
- iii) *Etant donné une variété affine \mathcal{V} , tout point de \mathcal{A} appartient à une et une seule variété affine parallèle à \mathcal{V} et de même dimension ("Postulat" d'Euclide).*

Démonstration. Les preuves sont immédiates. Soient deux variétés affines ayant un point en commun P , de la forme

$$P + F \quad \text{et} \quad P + F', \quad \text{avec} \quad F \subset F'.$$

Il est clair que tout point de la première variété affine appartient à la seconde.

Pour la seconde partie, on sait que si F et F' sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension et si $F \subset F'$, alors $F = F'$ (les justifications sont laissées au lecteur).

Enfin, soient \mathcal{V} une variété affine de sous-vectoriel directeur F et P un point de \mathcal{A} . Il est clair que $P + F$ est une variété affine contenant P parallèle à \mathcal{V} et de même dimension. L'unicité découle des deux premiers points. ■

Illustrons à présent les deux propositions précédentes dans le cas de la dimension 2 et de la dimension 3.

⁵Il est laissé au lecteur le soin de vérifier que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel. C'est une conséquence directe de la proposition I.5.2

⁶Certains auteurs préfèrent dire que deux variétés $P + F$ et $P' + F'$ sont parallèles si $F = F'$. Ils réservent alors le terme "faiblement parallèle" au cas $F \subset F'$.

5.1. Dimension 2. Dans le plan affine \mathbb{R}^2 , les variétés affines sont les points, les droites et l'espace tout entier. Les positions relatives de deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont les suivantes :

- ▶ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont (strictement) parallèles,
- ▶ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont confondues,
- ▶ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes (en un point).

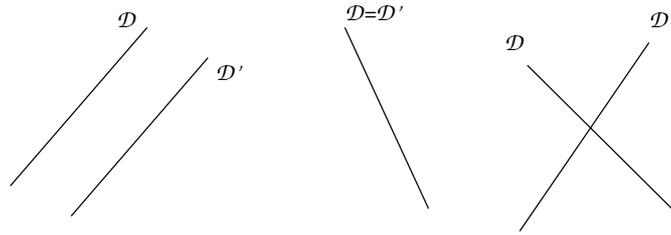


FIGURE II.16. Positions relatives de deux droites du plan.

Il nous suffit de montrer que deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' non parallèles se coupent en un point. Si $\mathcal{D} = P + \langle u \rangle$ et $\mathcal{D}' = Q + \langle v \rangle$ sont deux droites non parallèles, alors u et v sont linéairement indépendants et forment une base. Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{PQ} = \lambda u + \mu v$ et

$$P + \overrightarrow{PQ} - \mu v = P + \lambda u.$$

Le membre de droite appartient à \mathcal{D} et celui de gauche à \mathcal{D}' . On a donc trouvé un point d'intersection. Ce point est unique car s'il existait un second point d'intersection, on en déduirait que l'intersection serait une droite et que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

5.2. Dimension 3. Dans l'espace affine \mathbb{R}^3 , les variétés affines sont les points, les droites, les plans et l'espace tout entier.

Les positions relatives de deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont les suivantes :

- ▶ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont (strictement) parallèles,
- ▶ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont confondues,
- ▶ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes,
- ▶ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont gauches (elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles).

Remarque II.5.4. Les droites $\mathcal{D} = P + \langle u \rangle$ et $\mathcal{D}' = P' + \langle v \rangle$ sont gauches si u et v ne sont pas multiples l'un de l'autre (\mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles) et si l'équation

$$P + \lambda u = P' + \mu v \quad (\text{ou } P' - P = \lambda u - \mu v)$$

ne possède aucune solution (\mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas sécantes). Cela signifie que \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont gauches si et seulement si les vecteurs

$$\overrightarrow{PP'}, u, v$$

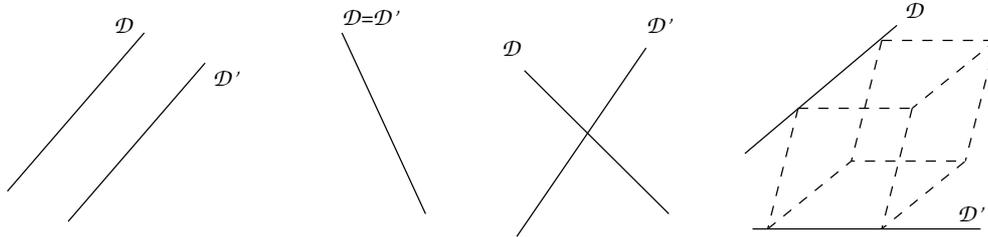


FIGURE II.17. Positions relatives de deux droites de l'espace.

sont linéairement indépendants (cf. proposition I.2.5).

La proposition suivante est immédiate.

Proposition II.5.5. *Deux droites sécantes (resp. strictement parallèles) déterminent un et un seul plan.*

Démonstration. Par exemple, si les droites sécantes sont de la forme $P+\rangle u \langle$ et $P+\rangle v \langle$, (u et v linéairement indépendants), on trouve l'unique plan $P+\rangle u, v \langle$

■

Ainsi, deux droites qui ne sont pas coplanaires⁷ sont gauches.

Les positions relatives de deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont les suivantes :

- ▶ \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont (strictement) parallèles,
- ▶ \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont confondus,
- ▶ \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants (en une droite).

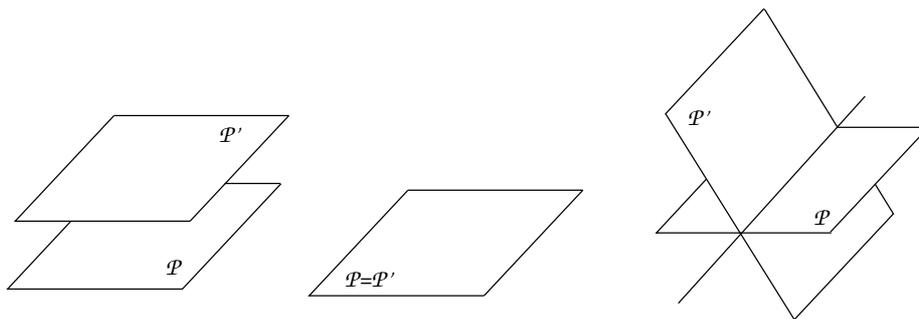


FIGURE II.18. Positions relatives de deux plans de l'espace.

Montrons que deux plans non parallèles se coupent suivant une droite. Soient les plans $P+\rangle u, v \langle$ et $Q+\rangle s, t \langle$ tels que $\rangle u, v \langle \neq \rangle s, t \langle$. On peut dès lors supposer que u n'appartient pas à $\rangle s, t \langle$. Par conséquent les vecteurs

⁷Deux droites sont *coplanaires* si elles sont incluses dans un même plan.

s, t, u forment une base et il existe des coefficients α, β, γ tels que $\overrightarrow{PQ} = \alpha u + \beta s + \gamma t$. Les deux plans ont donc un point d'intersection R de la forme

$$P + \overrightarrow{PQ} - \beta s - \gamma t = P + \alpha u.$$

De plus, il existe des coefficients λ, μ, δ tels que $v = \lambda u + \mu s + \delta t$ et

$$v - \lambda u = \mu s + \delta t.$$

Ce dernier vecteur w est non nul (car u et v sont linéairement indépendants) et appartient à $\rangle u, v \langle \cap \rangle s, t \langle$. Les deux plans ont donc la droite $R + \langle w \rangle$ en commun. L'intersection des deux plans est restreinte à cette droite car sinon, les deux plans seraient confondus.

Par des raisonnements semblables à ceux développés plus haut, on peut montrer que les positions relatives d'une droite \mathcal{D} et d'un plan \mathcal{P} sont :

- ▶ la droite et le plan sont (strictement) parallèles,
- ▶ la droite est incluse dans le plan,
- ▶ la droite et le plan sont sécants (en un point).

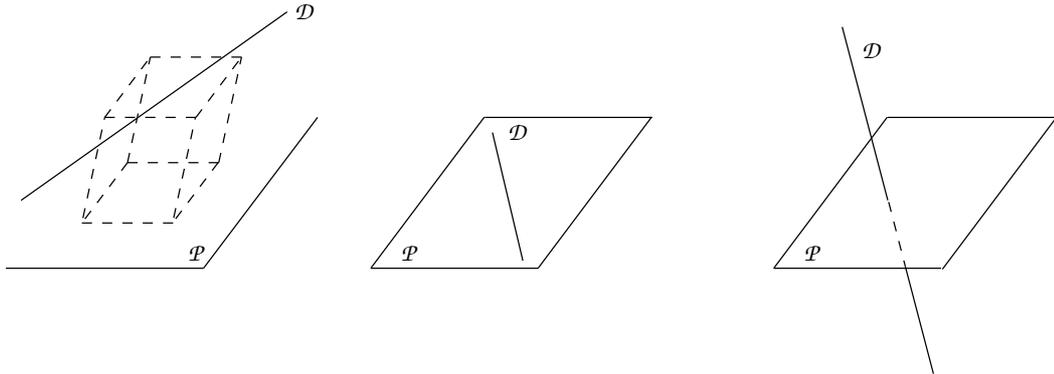


FIGURE II.19. Positions relatives d'une droite et d'un plan.

6. Repères et coordonnées

Définition II.6.1. Un *repère* de l'espace affine \mathcal{A} est un couple

$$\mathfrak{R} = (O, (e_1, \dots, e_n))$$

où O est un point de \mathcal{A} , appelé *origine* du repère, et (e_1, \dots, e_n) une base de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{A}}$ sur lequel est construit \mathcal{A} . Les *coordonnées (cartésiennes)* d'un point P dans le repère \mathfrak{R} sont les composantes du vecteur \overrightarrow{OP} dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Définition II.6.2. Des points P_1, \dots, P_n sont *affinement dépendants* si l'un d'eux est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ils sont dits *affinement indépendants*. On dit aussi que des points affinement indépendants forment un *simplexe*.

Les repères sont à la base de la géométrie analytique. On pourra mettre en équation les objets étudiés dans un repère donné.

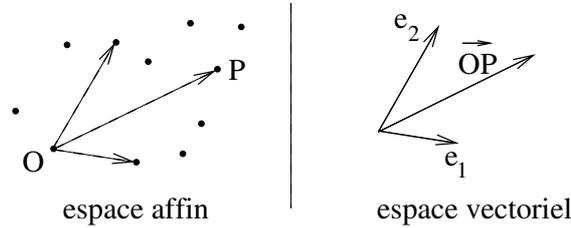


FIGURE II.20. Repère.

Proposition II.6.3. *Des points O, P_1, \dots, P_n sont affinement indépendants si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'eux s'exprime comme combinaison linéaire des autres. Ainsi, quitte à renuméroter les points, on peut supposer qu'il existe des nombres réels $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\overrightarrow{OP_1} = \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}.$$

En ajoutant O aux deux membres, il vient

$$\begin{aligned} P_1 &= O + \lambda_2(P_2 - O) + \dots + \lambda_n(P_n - O) \\ &= (1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n)O + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n. \end{aligned}$$

Ceci signifie que P_1 est combinaison affine de O, P_2, \dots, P_n , c'est-à-dire que O, P_1, \dots, P_n sont affinement dépendants. ■

Corollaire II.6.4. *Un couple $\mathfrak{R} = (O, (e_1, \dots, e_n))$ est un repère de l'espace affín \mathcal{A} si et seulement si les $n + 1$ points $O, E_1 = O + e_1, \dots, E_n = O + e_n$ sont affinement indépendants.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition précédente. ■

Proposition II.6.5. *Dans un espace affín \mathcal{A} muni d'un repère \mathfrak{R} , si les points A_1, \dots, A_n ont respectivement a_1, \dots, a_n pour vecteur de coordonnées, alors la combinaison affine $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$ est un point ayant pour vecteur de coordonnées $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, alors le vecteur $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$ a pour composantes $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ dans la base du repère \mathfrak{R} .*

Démonstration. Soit O l'origine du repère. Supposons que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$. Le vecteur $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$ s'écrit

$$\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}.$$

Par définition, les coordonnées a_i du point A_i dans le repère \mathfrak{R} sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA_i}$ dans la base du repère.

Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ et si $P = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$, le point P s'écrit

$$O + \overrightarrow{OP} = O + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}$$

et les coordonnées de P dans le repère \mathfrak{R} sont égales aux composantes de \overrightarrow{OP} dans la base du repère. ■

Remarque II.6.6. Tout comme nous avons vu dans le chapitre précédent les formules de changement de base, on peut considérer le problème analogue de changement de repère. Soient

$$\mathfrak{R} = (O, (e_1, \dots, e_n)) \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}' = (O', (e'_1, \dots, e'_n))$$

deux repères et M la matrice de changement de base de la base (e_1, \dots, e_n) à la base (e'_1, \dots, e'_n) . Si (x_1, \dots, x_n) (resp. (x'_1, \dots, x'_n)) est le vecteur des coordonnées d'un point P dans le repère \mathfrak{R} (resp. \mathfrak{R}'), alors

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + T$$

où T est le vecteur des composantes du vecteur $\overrightarrow{O'O}$ dans la base (e'_1, \dots, e'_n) . Pour s'en convaincre, il suffit de voir qu'il s'agit, à une translation de l'origine près, d'un changement de base.

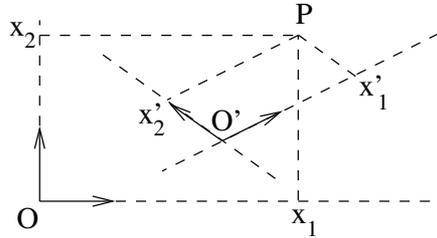


FIGURE II.21. Changement de repère.

7. Equations paramétriques et cartésiennes de variétés affines

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension n muni d'un repère \mathfrak{R} . Considérons une variété affine \mathcal{V} de dimension $p \leq n$.

Il existe des vecteurs u_1, \dots, u_p qui forment une base du sous-vectoriel directeur de \mathcal{V} . Dès lors, la variété affine est de la forme

$$\mathcal{V} = P_0 + \langle u_1, \dots, u_p \rangle = \{Q \in \mathcal{A} \mid Q = P_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

pour un point $P_0 \in \mathcal{V}$. La relation

$$Q = P_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$$

est une *équation paramétrique vectorielle* de \mathcal{V} .

Soit $\mathfrak{R} = (0, (e_1, \dots, e_n))$ un repère de l'espace affine \mathcal{A} . Dénotons par (x_1^0, \dots, x_n^0) , les coordonnées du point P_0 dans \mathfrak{R} et (u_{i1}, \dots, u_{in}) , les composantes du vecteur u_i dans la base de \mathfrak{R} , $i = 1, \dots, p$. Un point Q de coordonnées (x_1, \dots, x_n) appartient à \mathcal{V} si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x_1 &= x_1^0 + \lambda_1 u_{11} + \dots + \lambda_p u_{p1} \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^0 + \lambda_1 u_{1n} + \dots + \lambda_p u_{pn} \end{cases} .$$

On dit que ces équations forment un système d'*équations paramétriques cartésiennes* de \mathcal{V} .

Pour obtenir les équations cartésiennes⁸ de \mathcal{V} , tirons profit de nos connaissances sur les équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel. En effet, un point Q appartient à \mathcal{V} si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{P_0Q}$ appartient au sous-vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ de dimension p . Ainsi, dans la base du repère, $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ est caractérisé par $n-p$ équations homogènes indépendantes (cf. proposition I.7.5) de la forme

$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = 0, \quad i = 1, \dots, n-p.$$

Le vecteur $\overrightarrow{P_0Q}$ appartient à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_{1,1}(x_1 - x_1^0) + \dots + a_{1,n}(x_n - x_n^0) &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n-p,1}(x_1 - x_1^0) + \dots + a_{n-p,n}(x_n - x_n^0) &= 0 \end{cases} .$$

Si pour $i = 1, \dots, n-p$, on pose

$$a_{i,1}x_1^0 + \dots + a_{i,n}x_n^0 = b_i,$$

alors un point Q de coordonnées (x_1, \dots, x_n) appartient à \mathcal{V} si et seulement si

$$(7) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + \dots + a_{n-p,n}x_n &= b_{n-p} \end{cases} .$$

Ces équations sont appelées *équations cartésiennes* de \mathcal{V} .

Réciproquement⁹, l'ensemble des solutions d'un système de $n-p$ équations linéaires indépendantes à n inconnues est une variété affine de dimension p .

⁸On pourrait aussi refaire les mêmes développements qu'au premier chapitre en éliminant les paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ du système d'équations paramétriques cartésiennes de \mathcal{V} .

⁹cf. le théorème de structure des solutions d'un système d'équations linéaires.

Proposition II.7.1. Dans un repère \mathfrak{R} , si une variété affine \mathcal{V} de dimension p a pour équations cartésiennes (7), alors le sous-vectoriel directeur de \mathcal{V} a pour équation

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + \cdots + a_{n-p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

dans la base du repère \mathfrak{R} .

Démonstration. Si Q, Q' sont des points de \mathcal{V} , alors leurs coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (x'_1, \dots, x'_n) dans le repère \mathfrak{R} satisfont pour tout $i \in \{1, \dots, n-p\}$

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n - b_i = 0 \quad \text{et} \quad a_{i,1}x'_1 + \cdots + a_{i,n}x'_n - b_i = 0.$$

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{Q'Q}$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ de composantes $(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$ dans la base de \mathfrak{R} satisfait pour tout $i \in \{1, \dots, n-p\}$

$$a_{i,1}(x_1 - x'_1) + \cdots + a_{i,n}(x_n - x'_n) = 0.$$

Ce qui suffit car on vient de trouver $n-p$ équations homogènes indépendantes satisfaites par les éléments de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. ■

8. Cas de la dimension 2

On se place dans le plan affine muni d'un repère $\mathfrak{R} = (O, (e_1, e_2))$.

◇ Droite déterminée par un point et une direction

La droite passant par le point P de coordonnées (p_1, p_2) et de vecteur directeur u de composantes $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda u_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda u_2 \end{cases}.$$

L'élimination du paramètre λ donne

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & u_1 \\ x_2 - p_2 & u_2 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$u_2x_1 - u_1x_2 = p_1u_2 - p_2u_1.$$

On remarquera que l'annulation du déterminant ci-dessus traduit le fait que le vecteur \overrightarrow{PX} est un multiple de u .

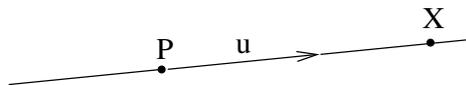


FIGURE II.22. Une droite du plan déterminée par un point et un vecteur directeur.

Si $u_1 \neq 0$, c'est-à-dire si la droite n'a pas la direction e_2 , l'équation de la droite peut s'écrire

$$x_2 = m x_1 + p,$$

on dit que m est le *coefficient directeur* de la droite.

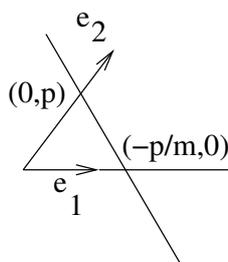


FIGURE II.23. Coefficient directeur d'une droite.

◇ Droite déterminée par deux points

La droite passant par les points P et Q de coordonnées respectives (p_1, p_2) et (q_1, q_2) a pour vecteur directeur \overrightarrow{PQ} de composantes $(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. Ainsi, on trouve comme équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & q_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 & q_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi la réécrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

◇ Sous-vecteur directeur d'une droite

Au vu de la proposition II.7.1, si une droite a pour équation cartésienne $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$, alors son sous-vecteur directeur a pour équation cartésienne $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Pour rappel, deux droites sont parallèles si elles ont le même sous-vecteur directeur. Ainsi, les droites d'équations $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ et $a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = b'$ sont parallèles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$(a_1, a_2) = \lambda(a'_1, a'_2)$$

ce que l'on écrira sous la forme

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2}$$

avec la convention tacite suivante : *si un dénominateur est nul, alors on annule le numérateur correspondant*. En particulier, deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur.

Supposons que les deux droites sont telles que $\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2}$. Si

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{b}{b'},$$

alors les deux droites sont confondues, sinon elles sont strictement parallèles.

◇ **Faisceau de droites**

Proposition II.8.1. *Soient deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équation cartésienne respective $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ et $a'_1x_1 + a'_2x_2 + b' = 0$ sécantes en P . Les droites passant par P sont exactement celles ayant une équation cartésienne de la forme*

$$(8) \quad \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 + b') = 0 \quad , \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

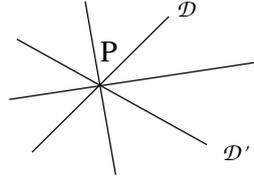


FIGURE II.24. Faisceau de droites passant par P .

Démonstration. Si une droite a une équation de la forme (8), alors il est clair que le point P appartient à cette droite puisque P satisfait simultanément les équations $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ et $a'_1x_1 + a'_2x_2 + b' = 0$.

Inversement, supposons qu'une droite d'équation

$$a''_1x_1 + a''_2x_2 + b'' = 0$$

contienne le point P . Le système

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0 \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + b' = 0 \\ a''_1x_1 + a''_2x_2 + b'' = 0 \end{cases}$$

de trois équations à deux inconnues possède les coordonnées de P comme solution¹⁰. Dès lors, une des équations est combinaison des autres. Puisque les deux premières équations sont indépendantes (sinon l'intersection des deux droites ne serait pas réduite à un point), cela signifie que la troisième équation est combinaison linéaire des deux premières. Ceci conclut la preuve. ■

¹⁰Cela signifie que le système est compatible.

9. Cas de la dimension 3

On se place dans l'espace affine muni d'un repère \mathfrak{R} .

◇ Droite déterminée par un point et une direction

La droite passant par le point P de coordonnées (p_1, p_2, p_3) et de vecteur directeur u de composantes $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda u_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda u_2 \\ x_3 = p_3 + \lambda u_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Supposons pour fixer les idées que $u_1 \neq 0$. L'élimination du paramètre λ donne les deux conditions¹¹

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & u_1 \\ x_2 - p_2 & u_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x_1 - p_1 & u_1 \\ x_3 - p_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} u_2 x_1 - u_1 x_2 = p_1 u_2 - p_2 u_1 \\ u_3 x_1 - u_1 x_3 = p_1 u_3 - p_3 u_1 \end{cases}.$$

On remarquera que l'annulation des deux déterminants ci-dessus traduit le fait que le vecteur \overrightarrow{PX} est un multiple de u , i.e.,

$$\begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

ce qui, avec nos conventions, peut encore s'écrire sous la forme

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \frac{x_3 - p_3}{u_3}.$$

Remarque II.9.1. Une droite \mathcal{D} étant l'intersection de deux plans, il est clair que les équations cartésiennes de \mathcal{D} ne sont pas uniques. On peut remplacer un système de deux équations indépendantes par tout système équivalent obtenu en effectuant des combinaisons linéaires des équations du premier système. Cette situation peut être illustrée de la manière suivante. La droite \mathcal{D} représentée sur la figure II.25 possède indifféremment comme

¹¹Une fois encore, on peut obtenir ces deux conditions en remarquant que le rang de

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

vaut 1 et en utilisant la proposition A.2.8 pour exprimer les conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles

$$\text{rg} \begin{pmatrix} u_1 & x_1 - p_1 \\ u_2 & x_2 - p_2 \\ u_3 & x_3 - p_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Bien sûr, dans le cas qui nous préoccupe ici, l'élimination peut être menée directement à bien.

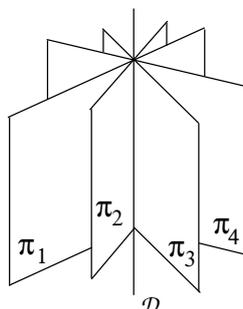


FIGURE II.25. Une droite peut être représentée de diverses façons.

équations cartésiennes

$$\begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_4 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \end{cases}, \dots$$

◇ **Droite déterminée par deux points**

La droite passant par les points P et Q de coordonnées respectives (p_1, p_2, p_3) et (q_1, q_2, q_3) a pour vecteur directeur \overrightarrow{PQ} de composantes

$$(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).$$

Ainsi, on trouve comme équation cartésienne

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3}.$$

◇ **Sous-vectoriel directeur d'une droite**

La droite d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b' \end{cases}$$

a pour sous-vectoriel directeur

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Cette droite vectorielle contient le vecteur

$$(a_2a'_3 - a_3a'_2, a_3a'_1 - a_1a'_3, a_1a'_2 - a'_1a_2).$$

Ainsi, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations respectives

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = d \\ c'_1x_1 + c'_2x_2 + c'_3x_3 = d' \end{cases}$$

sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs linéairement dépendants, ce qui se traduit par

dit autrement, si elles ont même sous-vectoriel directeur.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Donc (c_1, c_2, c_3) et (c'_1, c'_2, c'_3) sont combinaisons linéaires de (a_1, a_2, a_3) et (a'_1, a'_2, a'_3) et réciproquement.

Elles sont confondues (resp. strictement parallèles) si elles sont parallèles et possèdent (resp. n'ont pas) un point en commun. Vu la proposition A.2.4, les droites sont strictement parallèles si et seulement si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \\ c_1 & c_2 & c_3 & d \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & d' \end{pmatrix} = 3.$$

Elles sont confondues si et seulement si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \\ c_1 & c_2 & c_3 & d \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & d' \end{pmatrix} = 2.$$

Les droites sont non parallèles si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Par conséquent, elles sont sécantes si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \\ c_1 & c_2 & c_3 & d \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & d' \end{pmatrix} = 3$$

et gauches si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & b' \\ c_1 & c_2 & c_3 & d \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & d' \end{pmatrix} = 4.$$

◇ **Equations de plans**

Si un plan est déterminé par un point P de coordonnées (p_1, p_2, p_3) et par deux vecteurs directeurs linéairement indépendants de composantes (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) , alors le sous-vectoriel directeur de ce plan a pour équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

et donc, un point Q de coordonnées (x_1, x_2, x_3) appartient au plan si et seulement si le vecteur \overrightarrow{PQ} appartient au sous-vectoriel directeur, i.e.,

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - p_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En particulier, cela signifie que \overrightarrow{PQ} est combinaison linéaire de u et v .

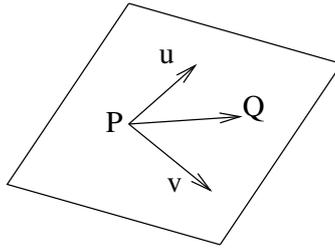


FIGURE II.26. Un plan déterminé par un point et deux vecteurs directeurs.

Trois points non alignés déterminent un et un seul plan. Si ces points P, Q, R ont pour coordonnées respectives $(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3), (r_1, r_2, r_3)$, alors \overrightarrow{PQ} et \overrightarrow{PR} sont des vecteurs directeurs du plan et celui-ci a pour équation

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, deux plans sont parallèles s'ils ont même sous-vectoriel directeur. Ainsi, les plans

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \quad \text{et} \quad a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b'$$

sont parallèles si

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{a_3}{a'_3}.$$

Ils sont confondus si

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{a_3}{a'_3} = \frac{b}{b'}.$$

◇ **Faisceau de plans**

Proposition II.9.2. *Soit une droite \mathcal{D} d'équations cartésiennes*

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0 \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + b' = 0 \end{cases} .$$

Les plans contenant \mathcal{D} sont exactement les plans d'équation

$$(9) \quad \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Démonstration. Les justifications sont analogues à celles développées dans la preuve de la proposition II.8.1. ■

Corollaire II.9.3. *Le plan \mathcal{P} passant par la droite \mathcal{D} d'équations cartésiennes*

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{q}(x_1, x_2, x_3) := a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0 \\ \mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3) := a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + b' = 0 \end{cases}$$

et par le point $P \notin \mathcal{D}$ de coordonnées (p_1, p_2, p_3) a pour équation

$$\mathbf{q}'(p_1, p_2, p_3) \mathbf{q}(x_1, x_2, x_3) - \mathbf{q}(p_1, p_2, p_3) \mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Démonstration. Puisque P satisfait l'équation (9), on a

$$\lambda \mathbf{q}(p_1, p_2, p_3) + \mu \mathbf{q}'(p_1, p_2, p_3) = 0. \quad \blacksquare$$

Corollaire II.9.4. *Le plan \mathcal{P} passant par la droite \mathcal{D} d'équations cartésiennes (10) et parallèle à la direction (v_1, v_2, v_3) non parallèle à \mathcal{D} a pour équation*

$$[\mathbf{q}'(v_1, v_2, v_3) - b'] \mathbf{q}(x_1, x_2, x_3) - [\mathbf{q}(v_1, v_2, v_3) - b] \mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Démonstration. Le sous-vectoriel directeur du plan ayant pour équation (9) doit contenir le vecteur de coordonnées (v_1, v_2, v_3) . Ainsi,

$$\lambda (\mathbf{q}(v_1, v_2, v_3) - b) + \mu (\mathbf{q}'(v_1, v_2, v_3) - b') = 0. \quad \blacksquare$$

Voici deux applications des faisceaux de plans.

Proposition II.9.5. *Etant donné deux droites gauches \mathcal{D} et \mathcal{D}' et un point P extérieur à celles-ci, il existe une et une seule droite passant par P et rencontrant les deux droites gauches. (A moins que le point P et l'une des droites gauches ne déterminent un plan parallèle à l'autre droite.)*

Démonstration. La droite \mathcal{D} et le point P déterminent un unique plan π . Par hypothèse, \mathcal{D}' n'est pas parallèle à π . Ainsi, il existe un unique point Q' tel que $\{Q'\} = \mathcal{D}' \cap \pi$. De la même manière, \mathcal{D}' et P déterminent un plan π' qui coupe \mathcal{D} en Q .

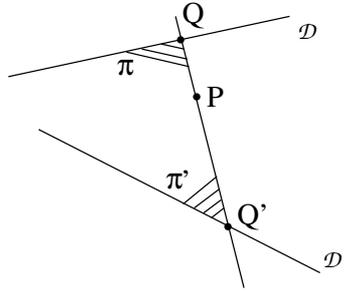


FIGURE II.27. Droite s'appuyant sur deux droites gauches et contenant P .

Les plans π et π' ne sont pas parallèles. Sinon, ayant P en commun, ils seraient confondus et les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' seraient coplanaires. Ainsi, l'intersection de π et de π' est une droite contenant P .

Pour conclure, il suffit de noter que cette droite contient les points Q et Q' . En effet, par définition du point Q , Q appartient à π' . Il appartient aussi à π car Q est un point de \mathcal{D} et cette droite est incluse dans π . On procède de même pour Q' .

Si une autre droite répond à la question, elle doit nécessairement appartenir aux plans π et π' et est par conséquent confondue avec la droite QQ' .

■

Combinée au corollaire II.9.3, cette preuve donne une méthode analytique pour rechercher les équations cartésiennes d'une telle droite.

Proposition II.9.6. *Etant donné trois droites gauches, il existe une et une seule droite parallèle à l'une d'elles et qui coupe les deux autres. (A moins que les trois droites ne soient parallèles à un même plan.)*

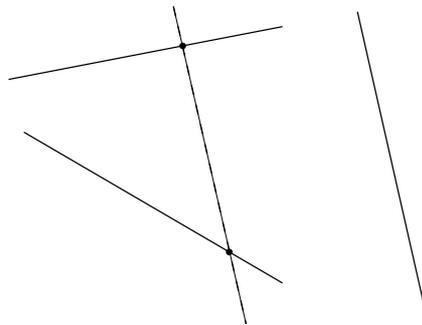


FIGURE II.28. Droite s'appuyant sur deux droites gauches et parallèle à une droite donnée.

Démonstration. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ trois droites gauches. Il existe un unique plan π_1 (resp. π_2) contenant \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) et parallèle à \mathcal{D}_3 . Si les plans π_1 et π_2 ne sont pas parallèles (i.e., si les trois droites ne sont pas parallèles à un même plan), alors ils déterminent une unique droite \mathcal{D} .

Cette droite \mathcal{D} répond à la question. Les justifications sont semblables à celles de la preuve précédente. ■

Combinée au corollaire II.9.4, cette preuve donne une méthode analytique pour rechercher les équations cartésiennes d'une telle droite.

CHAPITRE III

Espace vectoriel euclidien

Jusqu'à présent nous avons introduit les notions de droite, de plan, de parallélisme, etc... Cependant, nous n'avons encore jamais parlé d'orthogonalité, de longueur, de distance, d'angle, etc... Pour pouvoir introduire ces concepts, il faut munir l'espace vectoriel sur lequel est construit l'espace affine d'une structure plus riche. C'est pour cette raison que dans ce chapitre, nous allons introduire la notion de produit scalaire pour pouvoir par la suite considérer des espaces vectoriels *euclidiens*.

1. Produit scalaire

Définition III.1.1. Soit E un espace vectoriel réel. Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire B symétrique définie positive. Cela signifie que l'application

$$B : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

est telle que pour tous $x, y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

- ▶ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- ▶ $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ et $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$,
- ▶ si $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle > 0$.

Un espace vectoriel est dit *euclidien* lorsqu'on lui associe un produit scalaire.

Dans ce chapitre, on considère uniquement des espaces vectoriels réels euclidiens. Les résultats qui suivent peuvent se démontrer dans \mathbb{R}^n ou, sans difficulté accrue, dans tout espace vectoriel euclidien E . Dans la suite, E représentera toujours un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemple III.1.2. Dans le cas de \mathbb{R}^n , on privilégiera¹ ici, le *produit scalaire canonique*. Pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, il est défini comme le nombre réel

$$\langle x, y \rangle = \tilde{y}x = \sum_{j=1}^n x_j y_j = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

¹Il est facile de définir d'autres produits scalaires sur \mathbb{R}^n . Si B est une matrice diagonale $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dont les coefficients α_i sont positifs, alors l'application

$$(x, y) \mapsto \tilde{y}Bx = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . Dans le cas du produit scalaire canonique, cette matrice B est simplement l'identité.

Un produit scalaire est simplement une application qui à deux vecteurs de E associe un scalaire et qui jouit de certaines propriétés.

Grâce aux notions de base et de repères, on se ramènera finalement à \mathbb{R}^n .

On vérifie aisément qu'il s'agit d'un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

Définition III.1.3. Le produit scalaire d'un vecteur x par lui-même, parfois appelé *carré scalaire*, est le nombre positif ou nul $\langle x, x \rangle$. Dans le cas particulier du produit scalaire de \mathbb{R}^n , on a

$$\langle x, x \rangle = \tilde{x} x = \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

On peut dès lors considérer la racine carrée de $\langle x, x \rangle$ qui est appelée *module* ou *norme*² du vecteur x ,

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

et dans \mathbb{R}^n ,

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Un vecteur est *normé* si sa norme vaut 1.

Remarque III.1.4. Soit $x \in E$,

$$x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0.$$

Remarque III.1.5. Soit $x \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$|\lambda x| = |\lambda| |x|.$$

Démonstration. Il vient

$$|\lambda x|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 |x|^2.$$

On conclut en prenant la racine carrée. ■

Les preuves des deux propositions suivantes se trouvent dans le cours d'algèbre³.

Proposition III.1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a*

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si x et y sont linéairement dépendants. ■

Corollaire III.1.7 (Inégalité de Minkowski). *Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a*

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si x et y sont linéairement dépendants. ■

²On trouve aussi la notation $\|x\|$.

³Les démonstrations données dans le cours d'algèbre concernent l'espace vectoriel \mathbb{C}^n muni du produit scalaire canonique. Elles se transposent aisément au cas plus général envisagé ici.

2. Angle non orienté

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si $x, y \in E$ sont non nuls, on a

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{|x| |y|} \leq 1$$

et donc

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|} \leq 1.$$

Par conséquent, il existe un unique nombre réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|} = \cos \alpha.$$

Ce nombre α est appelé la mesure de l'angle non orienté entre x et y .



FIGURE III.1. Angle non orienté entre deux vecteurs.

3. Vecteurs orthogonaux

Définition III.3.1. Deux vecteurs sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul. En particulier, si ces deux vecteurs sont non nuls, alors la mesure de l'angle non orienté vaut $\pi/2$.

Proposition III.3.2. Des vecteurs non nuls x_1, \dots, x_p orthogonaux deux à deux sont linéairement indépendants.

Démonstration. Soient des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Supposons que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0.$$

En considérant le produit scalaire avec x_i , $i \in \{1, \dots, p\}$, on trouve

$$\langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, x_i \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_i \rangle + \dots + \lambda_p \langle x_p, x_i \rangle = \lambda_i |x_i|^2 = 0.$$

Par conséquent, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et les vecteurs sont linéairement indépendants. ■

Le produit scalaire permet de calculer les composantes d'un vecteur dans une base donnée.

Proposition III.3.3. Soient x_1, \dots, x_p des vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux. Si

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

alors

$$\lambda_i = \frac{\langle x, x_i \rangle}{|x_i|^2}.$$

Démonstration. C'est immédiat. En multipliant par x_j , $j \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$\langle x, x_j \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \delta_{ij} |x_i|^2 = \lambda_j |x_j|^2.$$

■

Proposition III.3.4 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt). *Soit p vecteurs linéairement indépendants x_1, \dots, x_p . Il existe p combinaisons linéaires de ceux-ci qui sont non nuls et orthogonaux deux à deux.*

Démonstration. On procède par récurrence sur p . Si $p = 2$, on a

$$\langle x_1, x_2 + \lambda x_1 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \lambda |x_1|^2.$$

Ce produit scalaire est nul si et seulement si

$$\lambda = -\frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{|x_1|^2}.$$

Les vecteurs x_1 et $x'_2 = x_2 - \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{|x_1|^2} x_1$ sont orthogonaux. De plus, x_1 et x_2 étant linéairement indépendants, x'_2 est non nul.

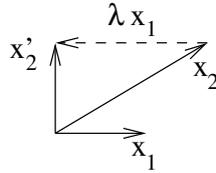


FIGURE III.2. Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Supposons à présent que x'_1, \dots, x'_{p-1} sont $p - 1$ vecteurs orthogonaux deux à deux, non nuls, combinaisons linéaires de x_1, \dots, x_{p-1} . Pour tout vecteur x et tout $j \in \{1, \dots, p - 1\}$, on a

$$\langle x - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x'_i, x'_j \rangle = \langle x, x'_j \rangle - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \langle x'_i, x'_j \rangle = \langle x, x'_j \rangle - \lambda_j |x'_j|^2.$$

Ainsi, $x - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x'_i$ est orthogonal à x'_1, \dots, x'_{p-1} si et seulement si

$$\lambda_j = \frac{\langle x, x'_j \rangle}{|x'_j|^2}.$$

En particulier,

$$x_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\langle x_p, x'_i \rangle}{|x'_i|^2} x'_i$$

est un vecteur orthogonal à x'_1, \dots, x'_{p-1} . De plus, il est non nul car x'_1, \dots, x'_{p-1} sont combinaisons linéaires de x_1, \dots, x_{p-1} et par hypothèse, x_p ne peut être combinaison linéaire de ceux-ci.

■

Remarque III.3.5. Cette dernière propriété peut s'énoncer comme suit. Dans tout espace vectoriel, il existe une base de vecteurs orthogonaux deux à deux.

Exemple III.3.6. Soient dans \mathbb{R}^3 les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Appliquons le procédé d'orthogonalisation. On pose $x'_1 = u$. Ensuite,

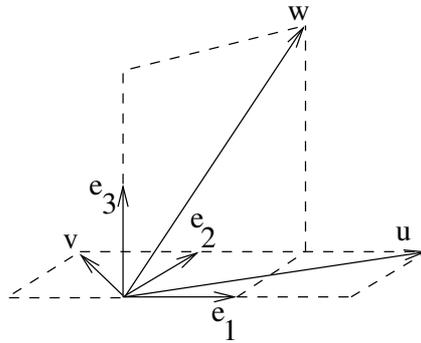


FIGURE III.3. Les vecteurs u, v, w .

$$x'_2 = v - \frac{\langle v, x'_1 \rangle}{|x'_1|^2} x'_1 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$x'_3 = w - \frac{\langle w, x'_1 \rangle}{|x'_1|^2} x'_1 - \frac{\langle w, x'_2 \rangle}{|x'_2|^2} x'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs x'_1, x'_2 et x'_3 sont combinaisons linéaires de u, v et w et sont orthogonaux 2 à 2.

4. Base orthonormée

Définition III.4.1. Une base (e_1, \dots, e_n) est dite *orthogonale* si les vecteurs qui la constituent sont orthogonaux. Elle est dite *orthonormée* si ces vecteurs sont de plus normés. Autrement dit, (e_1, \dots, e_n) est orthonormée si et seulement si

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Remarque III.4.2. Grâce au procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on peut, à partir d'une base donnée (x_1, \dots, x_n) construire une base orthogonale (x'_1, \dots, x'_n) . Il est clair que

$$\left(\frac{x'_1}{|x'_1|}, \dots, \frac{x'_n}{|x'_n|} \right)$$

est alors une base orthonormée.

Proposition III.4.3. Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , alors pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit, la i -ième composante d'un vecteur x dans une base orthonormée est le produit scalaire de x avec le i -ième vecteur de base.

Ce que l'on notera
 $x_i = \langle x, e_i \rangle$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition III.3.3. ■

Si on dispose d'une base orthonormée, le calcul du produit scalaire est grandement facilité en passant aux composantes. Il suffit de sommer les produits composante à composante.

Lemme III.4.4. Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , alors pour tous $x, y \in E$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle.$$

Autrement dit, si (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont les composantes respectives de x et y dans B , alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{et} \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Démonstration. Puisque B est une base, $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_j y_j e_j$. Ainsi, par linéarité du produit scalaire,

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Puisque B est orthonormé, il vient

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

où, pour la dernière égalité, on a utilisé la proposition précédente. ■

Soit $U = (u_1, \dots, u_n)$ une base quelconque de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . La matrice A de changement de base de U à B a pour j -ième colonne les composantes de u_j dans la nouvelle base B . Ainsi,

$$A_{ij} = \langle u_j, e_i \rangle.$$

Si U est une base orthonormée, alors

$$(\tilde{A}A)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\tilde{A})_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^n \langle u_i, e_k \rangle \langle u_j, e_k \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

La réciproque est également vraie. Si $(\tilde{A}A)_{ij} = \delta_{ij}$, alors U est une base orthonormée.

Définition III.4.5. Une matrice carrée A à coefficients réels est *orthogonale* si

$$\tilde{A}A = I$$

où I est la matrice identité. Puisque

$$\det(\tilde{A}A) = \det(\tilde{A}) \det(A) = (\det(A))^2 = 1$$

cela signifie que

$$\det A = \pm 1.$$

Remarque III.4.6. Une matrice $n \times n$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

On a donc démontré la proposition suivante.

Proposition III.4.7. Soient $U = (u_1, \dots, u_n)$ une base quelconque de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . La matrice A de changement de base de U à B est orthogonale si et seulement si U est orthonormé.

Exemple III.4.8. Voici deux exemples de matrices orthogonales, la première a un déterminant valant 1 et la seconde -1 ,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Orientation

Considérons l'exemple suivant.

Exemple III.5.1. Soient quatre bases orthonormées de \mathbb{R}^2 ,

$$T = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right), \quad U = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right),$$

$$V = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right), \quad W = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right).$$

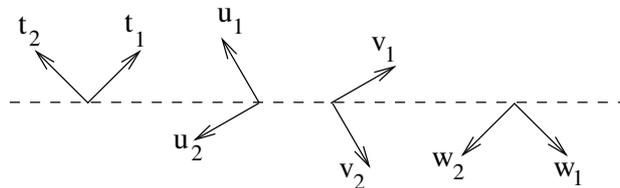


FIGURE III.4. Quatre bases orthonormées.

La matrice de changement de base de T à U est donnée par

$$A_{T \rightarrow U} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \det(A_{T \rightarrow U}) = 1.$$

En effet, il suffit de calculer les produits scalaires $\langle t_j, u_i \rangle$. La matrice de changement de base de T à V est

$$A_{T \rightarrow V} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \det(A_{T \rightarrow V}) = -1$$

et enfin, la matrice de changement de base de T à W est

$$A_{T \rightarrow W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \det(A_{T \rightarrow W}) = -1.$$

Il est facile de voir que

$$A_{V \rightarrow W} = A_{T \rightarrow W} A_{V \rightarrow T} = A_{T \rightarrow W} (A_{T \rightarrow V})^{-1}$$

et donc

$$\det(A_{V \rightarrow W}) = \det(A_{T \rightarrow W}) \frac{1}{\det(A_{T \rightarrow V})} = 1.$$

Cet exemple nous montre donc qu'on passe de T à U , de U à T , de V à W ou encore de W à V grâce à une matrice de déterminant 1. Par contre, dans tous les autres cas, le déterminant de la matrice de changement de base vaut -1 .

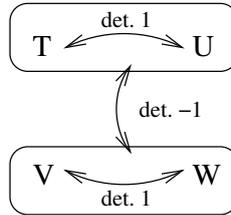


FIGURE III.5. Changement de bases orthonormées.

Définition III.5.2. Deux bases orthonormées U et V de E ont *même orientation* si la matrice de changement de base de U à V (ou de manière équivalente de V à U) a un déterminant égal à 1. La relation “avoir même orientation” est une relation d’équivalence sur l’ensemble des bases orthonormées de E . Cela signifie que

- ▶ U a même orientation que U (réflexivité),
- ▶ si U a même orientation que V , alors V a même orientation que U (symétrie),
- ▶ si U a même orientation que V et V a même orientation que W , alors U a même orientation que W (transitivité).

On peut donc partitionner l’ensemble des bases orthonormées de E en deux sous-ensembles disjoints non vides de manière telle que toutes les bases d’un même sous-ensemble possèdent la même orientation. Si on privilégie un des deux sous-ensembles, on dit qu’on *oriente* l’espace vectoriel euclidien E .

Définition III.5.3. Si l'espace euclidien E est orienté, on dit qu'une base orthonormée est *positive* si elle a même orientation que la base qu'on a décidé de privilégier.

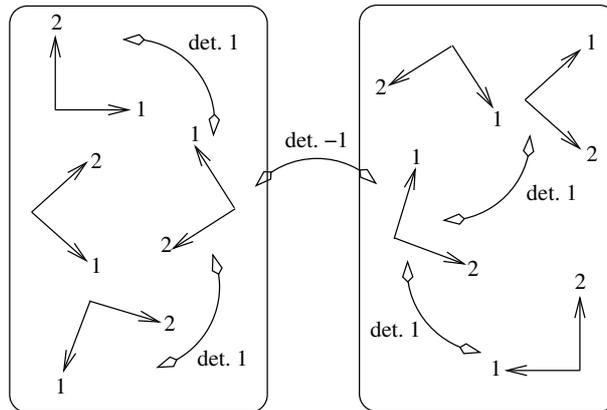


FIGURE III.6. L'ensemble des bases est partitionné en deux.

5.1. Cas de la dimension 2.

Exemple III.5.4. Dans \mathbb{R}^2 si on privilégie la base canonique, sur la figure suivante, la base (u, v) est positive et (u', v') ne l'est pas.

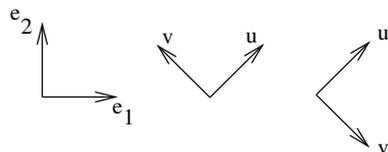


FIGURE III.7. (u, v) est positive, (u', v') ne l'est pas.

Orienter \mathbb{R}^2 permet de définir un sens de rotation dans le plan. En effet, privilégier une base orthonormée précise de quelle manière le vecteur e_1 doit “pivoter” dans le plan vectoriel pour se retrouver en e_2 . Nous avons vu qu'il y avait deux façons d'orienter un espace vectoriel. Une orientation correspond donc à privilégier le sens “trigonométrique” et l'autre correspond au sens “horlogique”. Dans le plan, on peut introduire la notion d'*angle orienté*. Tout d'abord, remarquons qu'on peut étendre la définition de bases “possédant la même orientation” aux bases non orthonormées en imposant que la matrice de changement de base soit de déterminant positif.

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 orienté et $B = (b_1, b_2)$ une base orthonormée positive. Soient u, v deux vecteurs non nuls de composantes respectives (u_1, u_2) et (v_1, v_2) dans la base B . Si α est l'angle non orienté entre u et v , alors

$$\langle u, v \rangle = |u| |v| \cos \alpha.$$

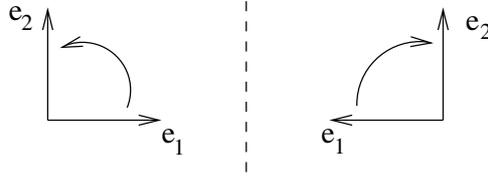


FIGURE III.8. Deux orientations, deux sens de rotation.

Puisque B est orthonormé, on a (cf. lemme III.4.4)

$$\langle u, v \rangle = \langle u_1 b_1 + u_2 b_2, v_1 b_1 + v_2 b_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

En élevant au carré la première relation et en se rappelant que $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, il vient

$$|u|^2 |v|^2 \sin^2 \alpha = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2.$$

Puisque α est un angle non orienté ($\alpha \in [0, \pi]$ et $\sin \alpha \geq 0$), on trouve

$$|u| |v| \sin \alpha = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Si u et v forment une base positive⁴, alors on passe de u à v dans le sens de rotation défini par b_1 et b_2 et dans ce cas, α représente l'angle orienté entre u et v .

Si u et v forment une base négative⁵, alors on passe de u à v dans le sens opposé à celui défini par b_1 et b_2 et dans ce cas, $2\pi - \alpha$ représente l'angle orienté entre u et v .

En résumé, l'angle orienté $\beta \in [0, 2\pi[$ des vecteurs u et v est déterminé par

$$(11) \quad \cos \beta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}}{|u| |v|}.$$

5.2. Cas de la dimension 3.

Exemple III.5.5. Dans \mathbb{R}^3 , on peut privilégier un repère droit⁶ (resp. gauche), i.e., e_1, e_2, e_3 (resp. e'_1, e'_2, e'_3) sont positionnés comme le pouce, l'index et le majeur de la main droite (resp. gauche).

⁴Remarquons que la matrice

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de changement de base de la base (u, v) à la base B . Ainsi, dire que (u, v) et B ont même orientation signifie que le déterminant de cette matrice est positif.

⁵Si (u, v) et B n'ont pas la même orientation, alors le déterminant de la matrice de changement de base est négatif.

⁶En latin, gauche se dit "sinistra" et droit se dit "dextra".

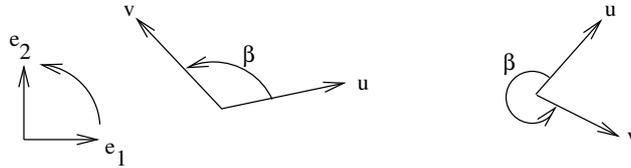


FIGURE III.9. Angles orientés.

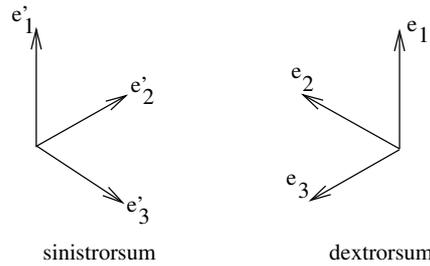


FIGURE III.10. Les deux orientations possibles de \mathbb{R}^3 .

Il y a une différence majeure entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Dans \mathbb{R}^2 , l'orientation fixe complètement le sens de rotation.

Dans l'espace, fixer les bases positives ne permet pas de décider quel sens de rotation choisir dans un plan déterminé par deux vecteurs. Cette situation est schématisée à la figure III.11.

En haut de la figure, on a représenté six bases de même orientation (on passe d'une base à la suivante par rotation autour d'un axe horizontal). Dans le bas de la figure, on considère le plan vectoriel π engendré par les vecteurs e_1 et e_2 de la première base. Ce plan est aussi engendré par les vecteurs e'_1 et e'_2 de la dernière base car sur notre exemple, on est passé de la première à la dernière base par une rotation de 180 degrés.

Ces deux vecteurs e_1 et e_2 définissent donc un sens de rotation dans le plan π (sur l'exemple, il s'agit du sens trigonométrique et on remarque que le vecteur e_3 "sort" de la feuille). Par contre, si on considère la dernière base (celle représentée à droite sur la figure), les vecteurs e'_1 et e'_2 engendrent le même plan vectoriel π mais cette fois, le sens de rotation défini par ces vecteurs est opposé au sens de rotation défini par e_1 et e_2 (ici, le vecteur e'_3 "rentre" dans la feuille et le sens de rotation est le sens horlogique).

Ainsi, dans l'espace, fournir une orientation en sélectionnant les bases positives ne permet pas de fixer de manière non ambiguë l'orientation d'un plan⁷.

⁷Un moyen pour imposer l'orientation du plan π est de considérer la donnée supplémentaire d'un vecteur z normal au plan. De cette manière, on est forcé de choisir une et une seule des deux bases proposées dans l'exemple car, alors, seul e_3 ou e'_3 aura même sens que z .

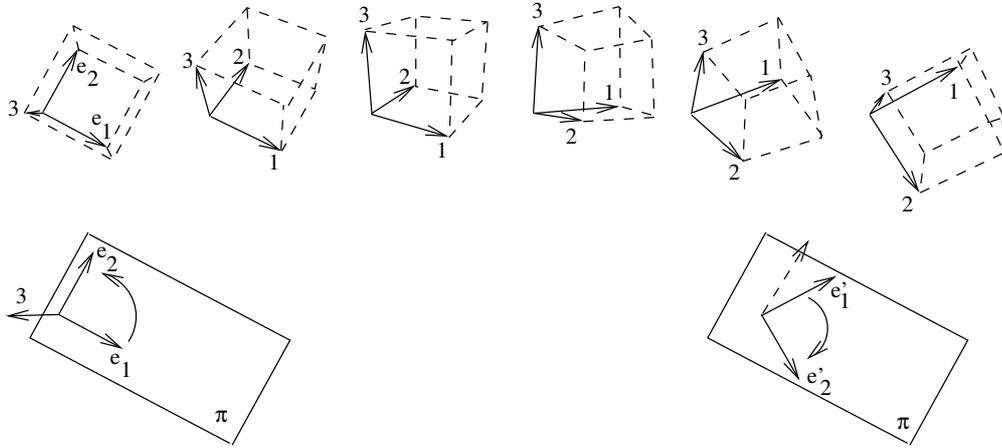


FIGURE III.11. Dans l'espace, des bases positives induisent deux sens de rotation différents dans un même plan.

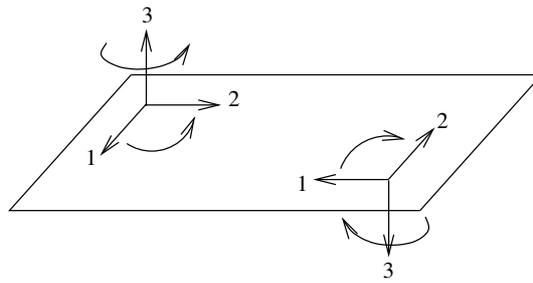


FIGURE III.12. Dans l'espace, des bases positives induisent deux sens de rotation différents.

6. Produit vectoriel

Dans cette section, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Proposition III.6.1. Soient $B = (b_1, b_2, b_3)$, une base orthonormée positive de E . Si u, v, w sont trois vecteurs de E de composantes respectives (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3) dans B , la valeur du déterminant

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

ne dépend pas de la base orthonormée positive de E choisie.

$$\begin{pmatrix} Au & Av & Aw \\ = A(u & v & w). \end{pmatrix}$$

Démonstration. La matrice A de changement de base d'une base orthonormée positive de E à une autre base positive de E est une matrice orthogonale de déterminant 1.

■

Puisque le déterminant donné dans la proposition précédente ne dépend pas de la base (positive) choisie, on décide d'appeler ce nombre le *produit mixte* de u, v, w et on le note

$$[u, v, w].$$

Remarque III.6.2. Si on change l'orientation, il est clair que le produit mixte change de signe.

Proposition III.6.3. *Le produit mixte jouit des propriétés suivantes.*

- ▶ *Il est linéaire par rapport à chacun de ses arguments.*
- ▶ *Il est alterné : il change de signe si on permute deux de ses arguments.*
- ▶ *$[u, v, w] = 0$ si et seulement si u, v, w sont linéairement dépendants.*
- ▶ *Si $[u, v, w] > 0$ (resp. $[u, v, w] < 0$), (u, v, w) est une base positive (resp. négative).*

Démonstration. Cela résulte des propriétés du déterminant.⁸

■

La première loi des mineurs appliquée à la troisième colonne du déterminant

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

donne

$$w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

qui n'est rien d'autre que le produit scalaire du vecteur w avec le vecteur de composantes

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Au vu de la proposition III.6.1, ce dernier vecteur ne dépend donc pas de la base orthonormée positive choisie. Tout comme le produit mixte $[u, v, w]$, il dépend seulement de l'orientation. Ainsi, on a la définition suivante.

Définition III.6.4 (Riesz-Fischer). Soient u, v deux vecteurs de l'espace vectoriel euclidien et orienté positivement E . L'unique vecteur $a \in E$ tel que

$$[u, v, w] = \langle a, w \rangle, \quad \forall w \in E,$$

s'appelle le *produit vectoriel* de u et v et est noté

$$u \wedge v.$$

⁸Remarquons que la matrice

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

est en fait la matrice de changement de base de la base (u, v, w) à la base considérée initialement.

Proposition III.6.5. *Le produit vectoriel de deux vecteurs jouit des propriétés suivantes.*

► *Il est linéaire par rapport à chaque argument,*

$$(\lambda u + \mu v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w) \quad \text{et} \quad u \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w).$$

► *Il est antisymétrique,*

$$u \wedge v = -(v \wedge u).$$

► *On a*

$$[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$$

et en particulier, $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v .

► *Soit α l'angle non orienté entre u et v . On a*

$$|u \wedge v| = |u| |v| \sin \alpha.$$

En particulier, u et v sont linéairement dépendants si et seulement si $u \wedge v = 0$.

► *Si u et v sont linéairement indépendants, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base positive de E . En particulier, si u et v sont orthonormés, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée positive de E .*

Démonstration. Les trois premiers points résultent de la définition même du produit vectoriel. Passons au quatrième point. On a

$$\langle u, v \rangle = |u| |v| \cos \alpha.$$

En passant aux composantes dans une base orthonormée positive et en élevant au carré, il vient

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(1 - \sin^2 \alpha).$$

De là,

$$|u|^2 |v|^2 \sin^2 \alpha = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2.$$

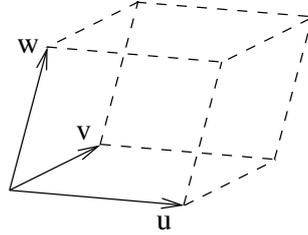
Enfin, pour le dernier point, on remarque tout d'abord que

$$[u, v, u \wedge v] = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = |u \wedge v|^2.$$

Ce produit mixte est non nul car u et v sont linéairement indépendants. On conclut en utilisant la proposition III.6.3. ■

Remarquons que les propriétés énoncées ci-dessus permettent de construire effectivement le vecteur $u \wedge v$ à partir des vecteurs u et v . En effet, si u et v sont linéairement indépendants, $u \wedge v$ leur est alors orthogonal. La quatrième propriété fournit la norme de $u \wedge v$. Enfin, l'ambiguïté sur le sens de ce vecteur est levée grâce à l'orientation de l'espace: $(u, v, u \wedge v)$ est une base positive.

Remarque III.6.6. La quatrième propriété nous montre que $|u \wedge v|$ est l'aire du parallélogramme construit sur u et v . De même, le volume du parallélépipède construit sur u, v, w est égal à $|[u, v, w]|$.

FIGURE III.13. Parallélépipède construit sur u, v, w .

Proposition III.6.7. Si (b_1, b_2, b_3) est une base orthonormée positive de E , alors

$$b_1 \wedge b_2 = b_3, \quad b_2 \wedge b_3 = b_1, \quad b_3 \wedge b_1 = b_2,$$

$$b_2 \wedge b_1 = -b_3, \quad b_3 \wedge b_2 = -b_1, \quad b_1 \wedge b_3 = -b_2,$$

et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$b_i \wedge b_i = 0.$$

Démonstration. C'est immédiat. Cela découle de la proposition III.6.5. ■

Proposition III.6.8 (Formules du double produit vectoriel). Pour tous $u, v, w \in E$, on a

$$u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$$

et

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u.$$

On retient ces formules comme ceci : un double produit vectoriel est égal au vecteur du milieu multiplié par le produit scalaire des deux autres moins l'autre vecteur de la parenthèse multiplié par le produit scalaire des deux autres.

Démonstration. Démontrons la première formule. L'autre s'obtient de manière analogue. Si $B = (b_1, b_2, b_3)$ est une base orthonormée positive, on peut décomposer les vecteurs u, v, w dans cette base. Vu la linéarité du produit vectoriel, on est ramené à vérifier cette formule pour les vecteurs de base. Nous devons montrer que pour tous $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

$$b_i \wedge (b_j \wedge b_k) = \langle b_i, b_k \rangle b_j - \langle b_i, b_j \rangle b_k.$$

Par conséquent, on a $3^3 = 27$ cas à envisager. Si i, j, k sont tous distincts, alors d'une part, $b_j \wedge b_k = \pm b_i$ et $b_i \wedge (b_j \wedge b_k) = 0$ et d'autre part, $\langle b_i, b_k \rangle$ et $\langle b_i, b_j \rangle$ sont nuls. Si $j = k$, les deux membres sont nuls. Les seuls cas à envisager sont donc $j \neq k$ et $i = j$ ou $i = k$. On se limite même au cas $i = j$,

le cas $i = k$ se traitant par antisymétrie en j, k . Ainsi, les cas sont

$$\begin{array}{ccc} \frac{i}{1} & \frac{j}{1} & \frac{k}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}$$

Dans chaque situation, la vérification est directe : par exemple,

$$b_1 \wedge (b_1 \wedge b_2) = b_1 \wedge b_3 = -b_2 = \langle b_1, b_2 \rangle b_1 - \langle b_1, b_1 \rangle b_2.$$

■

Proposition III.6.9. Soient $a, b \in E$. Si a est un vecteur non nul, alors l'équation

$$a \wedge x = b$$

a des solutions si et seulement si $\langle a, b \rangle = 0$. Dans ce cas, les solutions sont données par

$$(12) \quad x = \lambda a - \frac{1}{|a|^2} (a \wedge b), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Si l'équation $a \wedge x = b$ possède une solution, alors

$$a \wedge (a \wedge x) = a \wedge b$$

et en développant, on trouve

$$\langle a, x \rangle a - |a|^2 x = a \wedge b.$$

D'où

$$x = \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a - \frac{1}{|a|^2} a \wedge b,$$

et la solution est bien de la forme annoncée.

Inversement, si x est de la forme (12) alors

$$a \wedge x = a \wedge \lambda a - \frac{1}{|a|^2} a \wedge (a \wedge b) = -\frac{\langle a, b \rangle}{|a|^2} a + b.$$

Ainsi, x est solution de l'équation $a \wedge x = b$ si et seulement si $\langle a, b \rangle = 0$.

■

7. Complément orthogonal

Définition III.7.1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Le *complément orthogonal* de F est le sous-ensemble

$$F^\perp = \{u \in E \mid \langle u, f \rangle = 0, \forall f \in F\}.$$

Ainsi, F^\perp est constitué de l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F . Il est aisé de vérifier que F^\perp est encore un sous-espace vectoriel de E et que⁹

$$F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Proposition III.7.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E . Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme*

$$x = x_F + x_G, \quad \text{avec } x_F \in F, x_G \in F^\perp.$$

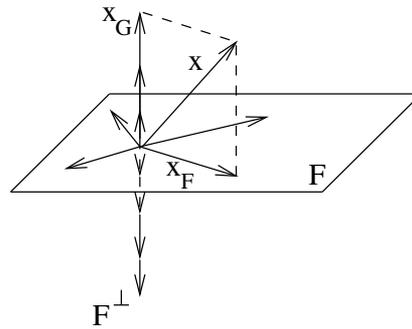


FIGURE III.14. Complément orthogonal.

Démonstration. Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F . Supposons disposer de la décomposition d'un vecteur $x \in E$ sous la forme prescrite $x = x_F + x_G$. Au vu de la proposition III.4.3,

$$x_F = \sum_{i=1}^p \langle x_F, e_i \rangle e_i.$$

Par définition du complément orthogonal, on a $\langle x_G, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et dès lors, $\langle x, e_i \rangle = \langle x_F, e_i \rangle$. Par conséquent, il vient

$$x_F = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i \quad \text{et} \quad x_G = x - x_F.$$

Les vecteurs x_F et x_G proposés ci-dessus répondent à la question. En effet, x_F étant combinaison linéaire de e_1, \dots, e_p , il appartient à F et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$\langle x_G, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_F, e_i \rangle = 0$$

ce qui montre que x_G appartient bien à F^\perp .

Il nous reste à montrer que la décomposition est unique. Si $x = x_F + x_G = x'_F + x'_G$ avec $x_F, x'_F \in F$, $x_G, x'_G \in F^\perp$, alors $x_F - x'_F = x'_G - x_G$ appartient à $F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc $x_F = x'_F$ et $x_G = x'_G$. ■

⁹Si deux sous-espaces vectoriels F et G sont tels que $F \cap G = \{0\}$, on dit qu'ils sont en somme directe et on écrit souvent $F \oplus G$.

Corollaire III.7.3. *On a*

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$$

et $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration. En effet, $\dim(F^\perp)^\perp = \dim F$ et $F \subset (F^\perp)^\perp$.

■

Définition III.7.4. Soient F un sous-espace vectoriel de E et F^\perp son complément orthogonal. On a montré que tout vecteur x de E se décomposait de manière unique (cf. proposition III.7.2) sous la forme

$$x = x_F + x_G, \quad \text{avec } x_F \in F, x_G \in F^\perp.$$

On appelle x_F la *projection orthogonale*¹⁰ de x sur F .

Remarque III.7.5. Si F est une droite vectorielle, c'est-à-dire si $F = \langle u \rangle$ avec $u \neq 0$, alors, en vertu de la proposition III.3.3, la projection orthogonale de x est donnée par

$$\left\langle x, \frac{u}{|u|} \right\rangle \frac{u}{|u|}.$$

Ainsi, cette dernière formule montre que pour déterminer la norme de la projection orthogonale d'un vecteur x sur une droite vectorielle, il suffit de calculer la valeur absolue du produit scalaire de x avec un vecteur directeur normé de la droite.

¹⁰On parle aussi parfois de la projection de x sur F parallèlement à F^\perp .

CHAPITRE IV

Géométrie affine euclidienne

A partir de maintenant, on considère, sauf mention explicite du contraire, des espaces affins euclidiens, c'est-à-dire, construits sur un espace vectoriel euclidien. Ainsi, les espaces affins que nous allons utiliser seront construits sur un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Cela va donc nous permettre de parler de notions d'angles, de distances, d'orthogonalité ou encore de projection orthogonale.

1. Repère orthonormé

Définition IV.1.1. Un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, (e_1, \dots, e_n))$ d'un espace affini euclidien \mathcal{A} est un repère tel que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{A}}$ sur lequel est construit \mathcal{A} .

1.1. Coordonnées polaires. Dans le plan affini \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, (e_1, e_2))$, tout point $P \neq O$ est caractérisé par ses coordonnées (x, y) dans \mathfrak{R} mais aussi par un couple unique (r, θ) tel que $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} .$$

Ce couple (r, θ) forme les *coordonnées polaires* du point P .

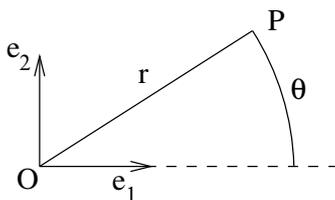


FIGURE IV.1. Coordonnées polaires.

1.2. Coordonnées cylindriques. Dans l'espace affini \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, (e_1, e_2, e_3))$, tout point $P \notin OE_3$ est caractérisé par ses coordonnées (x, y, z) dans \mathfrak{R} mais aussi par un triplet unique (r, θ, z) tel que $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} .$$

Ce triplet (r, θ, z) forme les *coordonnées cylindriques* du point P .

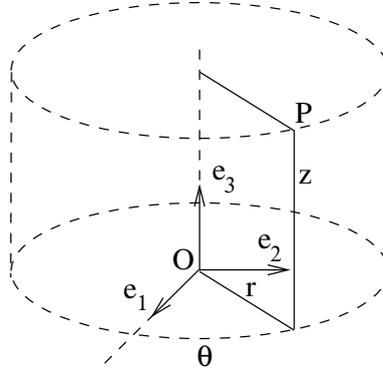


FIGURE IV.2. Coordonnées cylindriques.

1.3. Coordonnées sphériques. Dans l'espace affine \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, (e_1, e_2, e_3))$, tout point $P \notin OE_3$ est caractérisé par ses coordonnées (x, y, z) dans \mathfrak{R} mais aussi par un triplet unique (r, θ, ϕ) tel que $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $\phi \in [0, \pi]$ et

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} .$$

Ce triplet (r, θ, ϕ) forme les *coordonnées sphériques* du point P .

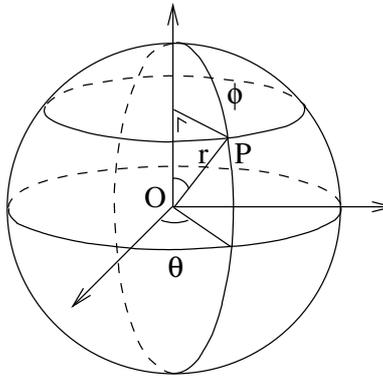


FIGURE IV.3. Coordonnées sphériques.

2. Angles

Remarque IV.2.1. Soit \mathcal{A} un espace affine euclidien de dimension n muni d'un repère orthonormé. Si on considère un hyperplan (c'est-à-dire une variété affine de dimension $n - 1$), alors cet hyperplan est caractérisé par une unique équation cartésienne de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b.$$

Le sous-vecteur directeur de cet hyperplan affine est un hyperplan vectoriel ayant pour dimension $n - 1$ et comme équation

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Il est clair que le complément orthogonal de cet hyperplan (i.e., l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ce dernier) est une droite vectorielle ayant pour vecteur directeur le vecteur N de composantes (a_1, \dots, a_n) dans la base du repère. On dit que N est un vecteur normal à l'hyperplan.

Remarque IV.2.2. Dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3, si un plan π est déterminé par un point P et deux vecteurs linéairement indépendants u et v , i.e.,

$$\pi = P + \langle u, v \rangle,$$

alors un vecteur normal à π est donné par

$$N = u \wedge v.$$

Définition IV.2.3. L'angle de deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' est le plus petit des angles non orientés entre un vecteur directeur de \mathcal{D} et un vecteur directeur de \mathcal{D}' . Si u (resp. u') est un vecteur directeur de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}'), alors $-u$

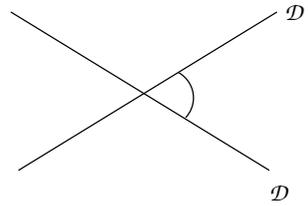


FIGURE IV.4. Angle de deux droites.

(resp. $-u'$) est aussi un vecteur directeur de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}'). Cela signifie que, suivant le choix des vecteurs directeurs u ou $-u$ (resp. u' ou $-u'$), la valeur

$$\frac{\langle u, u' \rangle}{|u| |u'|}$$

est définie au signe près (si cette valeur représente le cosinus d'un angle θ compris entre 0 et π , on pourrait donc avoir deux choix possibles : θ et $\pi - \theta$). Par définition, l'angle θ des deux droites est le plus petit des angles non orientés. Par conséquent¹, il est égal à

$$\cos \theta = \frac{|\langle u, u' \rangle|}{|u| |u'|}$$

et appartient à $[0, \pi/2]$.

¹Il suffit de choisir le cas où $\langle u, u' \rangle \geq 0$ car dans ce cas, il s'agit d'un angle compris entre 0 et $\pi/2$.

Définition IV.2.4. L'angle d'une droite \mathcal{D} et d'un hyperplan π est le complémentaire² de l'angle entre la droite \mathcal{D} et une droite ayant pour direction un vecteur normal à π . Si u est un vecteur directeur de \mathcal{D} et N un vecteur

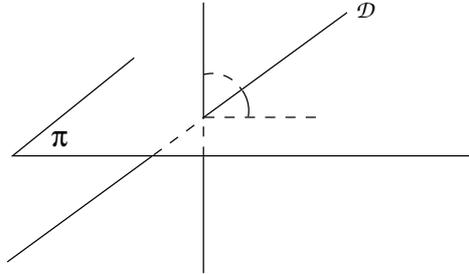


FIGURE IV.5. Angle d'une droite et d'un hyperplan.

normal à π , l'angle recherché est donc

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\langle u, N \rangle|}{|u| |N|}.$$

Remarque IV.2.5. Dans le cas d'un espace affine euclidien orienté de dimension 3, l'angle d'une droite $\mathcal{D} = P+\rangle u \langle$ et d'un plan $\pi = Q+\rangle v, w \langle$ est donné par

$$\sin \theta = \frac{|\langle u, v \wedge w \rangle|}{|u| |v \wedge w|} = \frac{|[u, v, w]|}{|u| |v \wedge w|}.$$

Définition IV.2.6. L'angle de deux hyperplans π et π' est l'angle de deux droites ayant pour directions respectives un vecteur normal à π et π' ,

$$\cos \theta = \frac{|\langle N, N' \rangle|}{|N| |N'|}.$$

Remarque IV.2.7. Dans le cas d'un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, si π et π' ont pour équations cartésiennes respectives

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \quad \text{et} \quad a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b',$$

l'angle des deux plans π et π' est donné par

$$\cos \theta = \frac{|a_1a'_1 + a_2a'_2 + a_3a'_3|}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2)}}.$$

²Le complémentaire de l'angle α est l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Si α appartient à $[0, \pi/2]$, son complémentaire aussi.

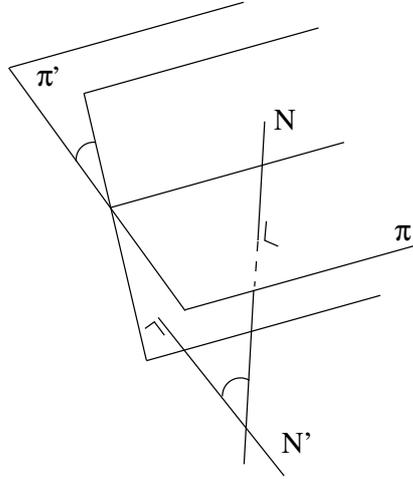


FIGURE IV.6. Angle de deux hyperplans.

3. Distance de deux points

Définition IV.3.1. On appelle *distance* de deux points P et Q de \mathcal{A} , le nombre positif ou nul, noté $d(P, Q)$, défini par

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Les propriétés de la distance découlent immédiatement des propriétés de la norme d'un vecteur. Ainsi, il vient

- ▶ $d(P, Q) \geq 0$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $P = Q$,
- ▶ $d(P, Q) = d(Q, P)$,
- ▶ l'*inégalité triangulaire* : $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$, l'égalité ayant lieu si et seulement si R est un point du segment $[P, Q]$.

Dans un repère orthonormé $(0, (e_1, \dots, e_n))$, si le point P (resp. Q) a pour coordonnées (p_1, \dots, p_n) (resp. (q_1, \dots, q_n)), alors le vecteur \overrightarrow{PQ} a pour composantes $(q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$ et

$$d(P, Q) = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}.$$

Proposition IV.3.2 (Pythagore). *Dans tout triangle ABC , on a*

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(C, B)^2 - 2 d(A, C) d(C, B) \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

Démonstration. On a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Si on effectue le carré scalaire des deux membres, il vient

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \rangle.$$

Dès lors,

$$d(A, B)^2 = \underbrace{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle}_{d(A,C)^2} + \underbrace{\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB} \rangle}_{d(C,B)^2} + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle.$$

Pour conclure, on remarque que

$$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = -\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = -\underbrace{|\overrightarrow{CA}|}_{d(A,C)} \underbrace{|\overrightarrow{CB}|}_{d(C,B)} \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

■

4. Variétés affines orthogonales

Définition IV.4.1. Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ayant respectivement u et u' comme vecteurs directeurs sont *orthogonales* si u et u' sont orthogonaux (i.e., si l'angle des deux droites vaut $\pi/2$).

Remarque IV.4.2. Dans un espace affini euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, les droites d'équation

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \frac{x_3 - p_3}{u_3}$$

et

$$\frac{x_1 - q_1}{u'_1} = \frac{x_2 - q_2}{u'_2} = \frac{x_3 - q_3}{u'_3}$$

sont orthogonales si

$$u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3 = 0.$$

Définition IV.4.3. Une droite \mathcal{D} de vecteur directeur u et un hyperplan π ayant N pour vecteur normal sont *orthogonaux* si u et N sont linéairement dépendants, autrement dit, multiples l'un de l'autre (i.e., si l'angle de la droite et du plan vaut $\pi/2$).

Remarque IV.4.4. Dans un espace affini euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, la droite d'équation

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \frac{x_3 - p_3}{u_3}$$

et le plan d'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$$

sont orthogonaux si

$$\frac{u_1}{a_1} = \frac{u_2}{a_2} = \frac{u_3}{a_3}.$$

Définition IV.4.5. D'une manière générale, deux variétés affines

$$\mathcal{V} = P + F \quad \text{et} \quad \mathcal{V}' = P' + F'$$

(où P et P' sont des points de \mathcal{A} et, F et F' sont des sous-espaces vectoriels) sont *orthogonales* si les sous-vectoriels directeurs F et F' sont orthogonaux, i.e.,

$$\forall u \in F, \forall u' \in F' : \langle u, u' \rangle = 0.$$

Définition IV.4.6. Par abus de langage³, on dira que deux hyperplans sont *perpendiculaires* si l'angle entre ces deux hyperplans vaut $\pi/2$.

Remarque IV.4.7. Dans un espace affín euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, les plans d'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \quad \text{et} \quad a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b'$$

sont perpendiculaires si

$$a_1a'_1 + a_2a'_2 + a_3a'_3 = 0.$$

5. Projection orthogonale

Définition IV.5.1. La *projection orthogonale* d'un point P sur un hyperplan π est l'unique point d'intersection de π avec la droite passant par P et ayant pour vecteur directeur, un vecteur normal à π .

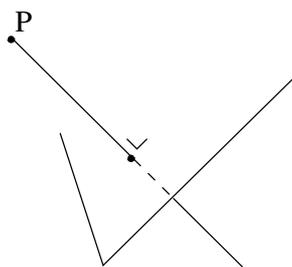


FIGURE IV.7. Projection orthogonale d'un point sur un hyperplan.

Cette définition est justifiée par la constatation suivante. Si l'hyperplan est donné par

$$\pi = Q + \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$$

et si N est une direction normale à π , alors

$$\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle^\perp = N$$

et

$$\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \cap N = \{0\}.$$

Ainsi, l'intersection de

$$P + N \quad \text{et} \quad Q + \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle,$$

si elle n'est pas vide, est réduite à un seul point. Au vu de la proposition III.7.2, le vecteur \overrightarrow{QP} se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur x de $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$ et d'un vecteur y de N ,

$$\overrightarrow{QP} = x + y.$$

se rappeler la proposition II.5.1 à la page 47.

³En effet, les deux plans ne sont pas des variétés affines orthogonale au sens de la définition IV.4.5.

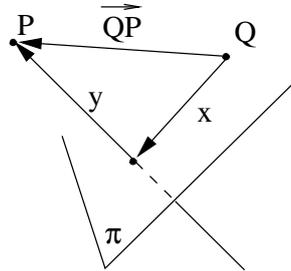


FIGURE IV.8. La projection orthogonale d'un point sur un hyperplan est unique.

Or

$$Q + x = P - y,$$

$$Q + x \in Q + \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle \quad \text{et} \quad P - y \in P + N \langle \cdot \rangle.$$

Et ainsi, l'intersection n'est pas vide.

Définition IV.5.2. De manière analogue, on définit la projection orthogonale d'un point P sur une droite \mathcal{D} comme étant l'unique point d'intersection de la droite \mathcal{D} et de l'hyperplan passant par P et orthogonal à \mathcal{D} . Les jus-

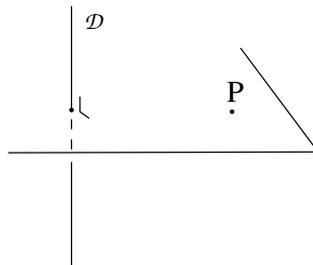


FIGURE IV.9. Projection orthogonale d'un point sur une droite.

tifications sont semblables à celles développées ci-dessus.

Remarque IV.5.3. D'une manière générale, si $\mathcal{V} = Q + F$ est une variété affine et P , un point de l'espace affine, alors la projection orthogonale de P sur \mathcal{V} est l'unique point appartenant à l'intersection

$$\mathcal{V} \cap P + F^\perp.$$

6. Distance d'un point à une variété affine

Définition IV.6.1. La *distance* d'un point P à une variété affine \mathcal{V} est la distance du point P à sa projection orthogonale P' sur la variété \mathcal{V} . On la note $d(P, \mathcal{V})$.

Cette dernière définition est justifiée par la proposition suivante.

Proposition IV.6.2. *La distance du point P à la variété affine \mathcal{V} est la borne inférieure des distances du point P aux points de \mathcal{V} . La borne inférieure n'est réalisée que si le point de \mathcal{V} est la projection orthogonale de P .*

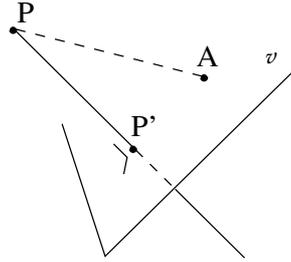


FIGURE IV.10. Distance d'un point à une variété affine.

Démonstration. Soit P' , la projection orthogonale de P sur \mathcal{V} . Pour tout point $A \in \mathcal{V}$, on a

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'P}.$$

Puisque le triangle APP' est rectangle en P' , il s'ensuit que

$$d(A, P)^2 = d(A, P')^2 + d(P', P)^2.$$

Par conséquent,

$$d(P, A) \geq d(P, P')$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $d(A, P') = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si $A = P'$. ■

Etablissons à présent une formule permettant de déterminer la distance d'un point P à un hyperplan π . Tout d'abord, on peut remarquer que la projection orthogonale P' du point P sur l'hyperplan π est égale à la projection orthogonale d'un point quelconque A de π sur la droite passant par P et ayant comme direction un vecteur N normal à l'hyperplan π . La distance de P à π est donnée par $d(P', P)$. Cette distance est donc égale à la norme de la projection orthogonale du vecteur \overrightarrow{AP} sur la droite vectorielle de direction N . Ainsi, au vu de la remarque III.7.5,

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, N \rangle|}{|N|}.$$

Supposons l'espace affín euclidien muni d'un repère orthonormé. Supposons également que l'équation cartésienne de π est de la forme

$$(13) \quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

et que le point P a pour coordonnées (p_1, \dots, p_n) . Un vecteur N normal à π a pour composantes (a_1, \dots, a_n) et un point A de coordonnées

(t_1, \dots, t_n) appartenant à π satisfait (13). Dès lors, \overrightarrow{AP} a pour composantes $(p_1 - t_1, \dots, p_n - t_n)$ et

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AP}, N \rangle &= a_1(p_1 - t_1) + \dots + a_n(p_n - t_n) \\ &= a_1 p_1 + \dots + a_n p_n \underbrace{- a_1 t_1 - \dots - a_n t_n}_{=b}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la formule suivante

$$d(P, \pi) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Cette formule s'adapte aisément au cas de la dimension 3.

Pour les deux problèmes qui suivent, on s'intéresse uniquement au cas d'un espace affine euclidien de dimension 3 et orienté.

Etablissons tout d'abord une formule donnant la distance d'un point P à une droite $\mathcal{D} = A + \langle u \rangle$. Nous savons que cette distance est réalisée lorsqu'on considère la projection orthogonale P' de P sur \mathcal{D} , c'est-à-dire

$$d(P, \mathcal{D}) = d(P, P').$$

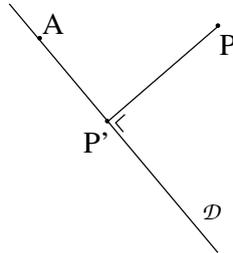


FIGURE IV.11. Distance d'un point à une droite.

$\overrightarrow{AP'} = t u$ avec $t \in \mathbb{R}$. A la deuxième ligne, on peut remplacer $\overrightarrow{AP'}$ par u car quel que soit le signe de t , un angle et son supplémentaire ont même sinus.

Ainsi, le triangle $PP'A$ est rectangle en P' . Par conséquent,

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{D}) = d(P, P') &= d(A, P) \sin(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AP}) \\ &= \frac{1}{|u|} \left(|u| |\overrightarrow{AP}| \sin(u, \overrightarrow{AP}) \right) \\ &= \frac{|u \wedge \overrightarrow{AP}|}{|u|} \end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, on a utilisé la proposition III.6.5.

Pour conclure cette section, nous considérons le problème de définir⁴ et de déterminer la distance entre deux droites gauches. Par définition, il s'agit

⁴En effet, jusqu'à présent nous avons toujours considéré la distance d'un point à une variété affine et non pas, la distance entre deux variétés affines, dans le cas qui nous occupe ici, il s'agit de la distance entre deux droites.

de la plus petite distance entre un point quelconque de $\mathcal{D} = A + \langle u \rangle$ et un point quelconque de $\mathcal{D}' = A' + \langle u' \rangle$. Par la remarque II.5.4, nous savons que

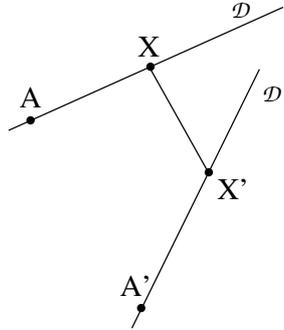


FIGURE IV.12. Perpendiculaire commune et distance de deux droites gauches.

les vecteurs $u, u', \overrightarrow{AA'}$ sont linéairement indépendants. Le vecteur $u \wedge u'$ est un vecteur non nul orthogonal à u et à u' . Il existe donc une et une seule droite s'appuyant sur \mathcal{D} et \mathcal{D}' et ayant $u \wedge u'$ comme direction (cf. proposition II.9.6). Cette droite s'appelle la *perpendiculaire commune* aux deux droites gauches \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Les points X et X' qui sont les intersections respectives de \mathcal{D} et de \mathcal{D}' avec cette droite s'appellent les *pieds* de la perpendiculaire commune.

Les vecteurs u, u' et $u \wedge u'$ sont linéairement indépendants. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ possède une unique décomposition dans la base $u, u', u \wedge u'$

$$(14) \quad \overrightarrow{AA'} = \alpha u + \beta u' + \gamma (u \wedge u'), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Si on considère les composantes de ces différents vecteurs dans la base orthonormée positive associée au repère de l'espace affine, cette dernière égalité vectorielle peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_1 & u'_1 & (u \wedge u')_1 \\ u_2 & u'_2 & (u \wedge u')_2 \\ u_3 & u'_3 & (u \wedge u')_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{AA'})_1 \\ (\overrightarrow{AA'})_2 \\ (\overrightarrow{AA'})_3 \end{pmatrix}.$$

Si on applique les formules de Cramer pour résoudre ce système en α, β, γ , on trouve

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{|u \wedge u'|^2} [\overrightarrow{AA'}, u', u \wedge u'] \\ \beta &= \frac{1}{|u \wedge u'|^2} [u, \overrightarrow{AA'}, u \wedge u'] \\ \gamma &= \frac{1}{|u \wedge u'|^2} [u, u', \overrightarrow{AA'}] \end{aligned}$$

car

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u'_1 & (u \wedge u')_1 \\ u_2 & u'_2 & (u \wedge u')_2 \\ u_3 & u'_3 & (u \wedge u')_3 \end{pmatrix} = [u, u', u \wedge u'] = \langle u \wedge u', u \wedge u' \rangle.$$

Au vu de l'équation (14), on a⁵

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'} - \alpha u - \beta u' = \gamma(u \wedge u').$$

Proposition IV.6.3. *La distance de deux points quelconques A et A' pris sur chacune des deux droites gauches \mathcal{D} et \mathcal{D}' est supérieure ou égale à la distance $|\overrightarrow{XX'}|$ entre les pieds de la perpendiculaire commune aux deux droites. L'égalité est réalisée si et seulement si A et A' coïncident avec les pieds de cette perpendiculaire commune.*

Démonstration. Vu ce qui précède, nous savons que $\overrightarrow{XX'}$ est orthogonal à \overrightarrow{AX} et $\overrightarrow{A'X'}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AA'}|^2 &= |\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{X'A'}|^2 \\ &= \langle \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{X'A'}, \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{X'A'} \rangle \\ &= |\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{X'A'}|^2 + |\overrightarrow{XX'}|^2. \end{aligned}$$

Ceci montre bien que $|\overrightarrow{AA'}| \geq |\overrightarrow{XX'}|$. L'égalité a donc lieu si et seulement si

$$|\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{X'A'}| = 0.$$

Or les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' étant gauches⁶, cela n'a lieu que si $X = A$ et $X' = A'$. ■

Puisque, par définition, la distance entre les deux droites est la plus petite distance entre des points quelconques de \mathcal{D} et de \mathcal{D}' , on conclut du résultat précédent que cette distance est égale à $|\overrightarrow{XX'}|$ et vaut donc

$$|\overrightarrow{XX'}| = |\gamma(u \wedge u')| = \frac{1}{|u \wedge u'|^2} [u, u', \overrightarrow{AA'}](u \wedge u') = \frac{|[u, u', \overrightarrow{AA'}]|}{|u \wedge u'|}.$$

En conclusion, nous avons obtenu

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{|[u, u', \overrightarrow{AA'}]|}{|u \wedge u'|}.$$

Remarque IV.6.4. Cette dernière formule peut être interprétée géométriquement comme la norme de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ sur l'axe ayant $\frac{u \wedge u'}{|u \wedge u'|}$ comme vecteur directeur unitaire (cf. remarque III.7.5).

Remarque IV.6.5. On peut définir la *distance entre deux variétés affines* quelconques (pas seulement deux droites) comme étant la borne inférieure des distances entre un point quelconque d'une variété et un point quelconque de l'autre variété.

⁵En effet, on aurait deux décompositions dans une même base

$$\overrightarrow{AA'} = \alpha u + \beta u' + \gamma(u \wedge u') = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{X'A'} + \overrightarrow{XX'}.$$

⁶Si les vecteurs \overrightarrow{AX} et $\overrightarrow{X'A'}$ sont tous deux non nuls, alors ils sont linéairement indépendants.

Nous concluons cette section en introduisant l'hyperplan médiateur d'un segment.

Définition IV.6.6. L'hyperplan médiateur d'un segment $[A, B]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B .

Proposition IV.6.7. Il s'agit d'un hyperplan orthogonal à la droite AB et passant par le milieu du segment $[A, B]$.

Démonstration. Soient M le milieu de $[A, B]$ et X un point tel que $d(X, A) = d(X, B)$. On a

$$|\overrightarrow{XA}|^2 = \langle \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA} \rangle = |\overrightarrow{XM}|^2 + 2\langle \overrightarrow{XM}, \overrightarrow{MA} \rangle + |\overrightarrow{MA}|^2.$$

On dispose d'une relation analogue pour le point B . En soustrayant ces deux relations, on trouve

$$|\overrightarrow{XA}|^2 - |\overrightarrow{XB}|^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 + 2\langle \overrightarrow{XM}, \underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{BA}} \rangle.$$

Puisque M est le milieu du segment $[A, B]$ et que X est équidistant de A et de B , on en tire que $X = M$ ou que \overrightarrow{XM} et \overrightarrow{BA} sont orthogonaux. ■

7. Projection orthogonale d'un angle et trigonométrie sphérique

Dans la preuve principale de cette section, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme IV.7.1 (angles à côtés perpendiculaires). Dans un espace afffin euclidien de dimension 2 orienté, on considère deux vecteurs linéairement indépendants u et v (resp. u' et v') tels que u (resp. v) soit orthogonal à u' (resp. v'). Si θ est l'angle non orienté entre u et v , alors l'angle non orienté entre u' et v' vaut θ si (u, u') a la même orientation que (v, v') et $\pi - \theta$ sinon.

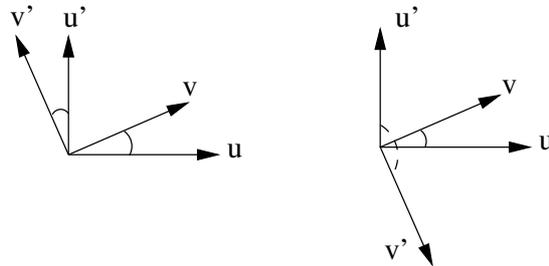


FIGURE IV.13. Angles à côtés perpendiculaires.

Démonstration. On peut, sans perte de généralité, supposer les vecteurs u, u', v, v' normés. Soient (a, b) les composantes de v dans la base (u, u') . Les composantes de v' dans cette base sont de la forme $\pm(-b, a)$. Plus

précisément, les composantes sont $(-b, a)$ si (u, u') a la même orientation que (v, v') et $-(-b, a)$ sinon. Il vient

$$\langle u', v' \rangle = \pm a = \pm \langle u, v \rangle$$

d'où le résultat. ■

Dans la suite de cette section, on se place une fois encore dans un espace affine euclidien de dimension 3 orienté.

Considérons un plan π contenant deux points Q et R ainsi qu'un point P n'appartenant pas à π . Notons α l'angle en P du triangle PQR . Soit P' la projection orthogonale de P sur π et A l'angle en P' du triangle $P'QR$. On appelle A , la *projection orthogonale* de l'angle α sur π . Notons β (resp. γ) les angles non orientés formés par $\overrightarrow{PP'}$ et $\overrightarrow{P'Q}$ (resp. $\overrightarrow{PP'}$ et $\overrightarrow{P'R}$). On

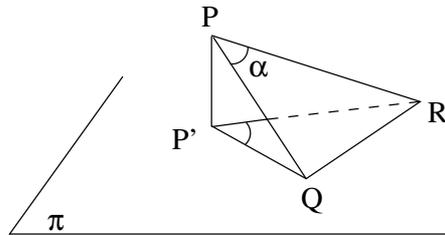


FIGURE IV.14. Projection orthogonale de l'angle α sur le plan π .

désigne alors par B (resp. C) la projection orthogonale de β sur un plan perpendiculaire à PR (resp. PQ).

Proposition IV.7.2 (Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique).

Avec les notations qui précèdent, on a

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \cos A \sin \beta \sin \gamma$$

et

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}.$$

Démonstration. Soient les vecteurs normés

$$u = \frac{\overrightarrow{PP'}}{|\overrightarrow{PP'}|}, \quad v = \frac{\overrightarrow{P'Q}}{|\overrightarrow{P'Q}|} \quad \text{et} \quad w = \frac{\overrightarrow{P'R}}{|\overrightarrow{P'R}|}.$$

Par définition des angles α, β et γ , on a

$$\cos \alpha = \langle v, w \rangle, \quad \cos \beta = \langle u, v \rangle \quad \text{et} \quad \cos \gamma = \langle u, w \rangle.$$

Le vecteur $u \wedge v$ est un vecteur de norme $\sin \beta$ perpendiculaire au plan $PP'Q$. Il est donc orthogonal à $\overrightarrow{P'R}$. De la même façon, $u \wedge w$ est un vecteur de norme $\sin \gamma$ perpendiculaire au plan $PP'R$. Il est donc orthogonal à $\overrightarrow{P'Q}$.

De plus, il est clair⁷ que $u \wedge v$ et $u \wedge w$ ont même orientation que $\overrightarrow{P'Q}$ et $\overrightarrow{P'R}$. On peut donc appliquer le lemme précédent et on obtient

$$\cos A = \frac{\langle u \wedge v, u \wedge w \rangle}{\sin \beta \sin \gamma}$$

et au vu de la proposition III.6.5, on a aussi

$$\sin A = \frac{|(u \wedge v) \wedge (u \wedge w)|}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Le reste de la preuve consiste principalement en des manipulations de vecteurs. Ainsi, si on se rappelle que $[x, y, z] = \langle x \wedge y, z \rangle$, on trouve

$$\sin \beta \sin \gamma \cos A = [u, w, u \wedge v] = [u \wedge v, u, w] = \underbrace{\langle (u \wedge v) \wedge u, w \rangle}_{v - \langle u, v \rangle u}.$$

Par conséquent,

$$\sin \beta \sin \gamma \cos A = \underbrace{\langle v, w \rangle}_{\cos \alpha} - \underbrace{\langle u, v \rangle}_{\cos \beta} \underbrace{\langle u, w \rangle}_{\cos \gamma}$$

ce qui donne la première formule. Passons à la seconde formule. On a

$$|(u \wedge v) \wedge (u \wedge w)| = |\langle u \wedge v, w \rangle u - \underbrace{\langle u \wedge v, u \rangle}_{=0} w| = |[u, v, w]|$$

et donc

$$\sin A \sin \beta \sin \gamma = |[u, v, w]|,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{|[u, v, w]|}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

On s'aperçoit que cette expression est symétrique en les données. Dès lors, sans refaire d'autres calculs, on en tire que

$$\frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{|[u, v, w]|}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}.$$

■

Définition IV.7.3. Une *sphère* de centre C et de rayon R est l'ensemble des points P tels que $d(P, C) = R$.

Remarque IV.7.4. Une sphère de centre P coupe PP' , PR et PQ en trois points formant un *triangle sphérique* dont α , β et γ sont les côtés et A, B, C les angles.

⁷Il suffit de se rendre compte que l'application $x \mapsto u \wedge x$ définie dans le plan des vecteurs orthogonaux à u correspond à une rotation d'amplitude $\pi/2$ pour les vecteurs de ce plan.

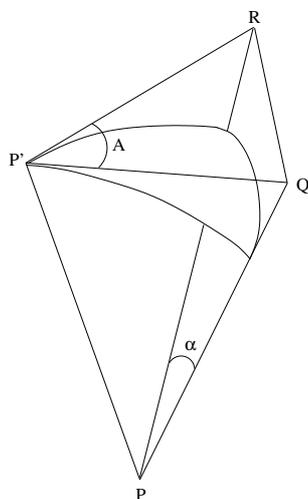


FIGURE IV.15. Triangle sphérique.

8. Polyèdres réguliers

Nous terminons ce chapitre en introduisant succinctement les notions de convexité et de polyèdre régulier.

Définition IV.8.1. Un ensemble \mathcal{C} de points d'un espace affine est *convexe* si, pour tous $A, B \in \mathcal{C}$, le segment $[A, B]$ est inclus dans \mathcal{C} .

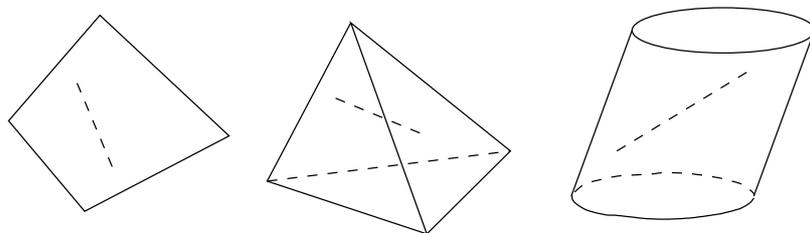


FIGURE IV.16. Des ensembles convexes.

Définition IV.8.2. Une *combinaison convexe* de points P_1, \dots, P_n est une combinaison affine de la forme

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ et $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. L'ensemble des combinaisons convexes de P_1, \dots, P_n

$$\{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i\}$$

s'appelle l'*enveloppe convexe* de P_1, \dots, P_n .

Exemple IV.8.3. L'enveloppe convexe de deux points distincts A et B est le segment $[A, B]$. L'enveloppe convexe de trois points non alignés A, B et C

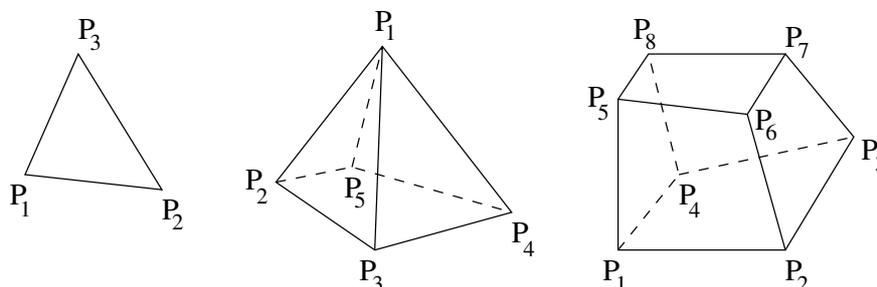


FIGURE IV.17. Quelques enveloppes convexes.

est le triangle ABC . L'enveloppe convexe de quatre points non coplanaires et trois à trois non alignés est un tétraèdre.

Proposition IV.8.4. *L'enveloppe convexe de P_1, \dots, P_n est convexe.*

Démonstration. Soient deux points A et B de l'enveloppe convexe de P_1, \dots, P_n ,

$$A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n, \quad \sum_i \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0,$$

$$B = \beta_1 P_1 + \dots + \beta_n P_n, \quad \sum_i \beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0.$$

Un point du segment $[A, B]$ s'écrit

$$(1 - \mu)A + \mu B = (\alpha_1 - \mu\alpha_1 + \mu\beta_1)P_1 + \dots + (\alpha_n - \mu\alpha_n + \mu\beta_n)P_n$$

avec $\mu \in [0, 1]$. On s'aperçoit que la somme des coefficients vaut 1 et que chaque coefficient est positif ou nul, ce qui suffit. ■

Définition IV.8.5. Un *polyèdre* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous supposons connues les notions de *face*, d'*arête* et de *sommet* d'un polyèdre. Un polyèdre est dit *régulier* si chaque face est un même polygone régulier⁸.

Proposition IV.8.6 (Relation d'Euler-Poincaré). *En dimension 3, si un polyèdre possède s sommets, a arêtes et f faces alors*

$$s - a + f = 2.$$

Démonstration. La démonstration sort du cadre de ce cours introductif. On pourra par exemple consulter, H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, seconde édition, Macmillan, New-York.

⁸Les polyèdres réguliers sont aussi appelés solides platoniques. On peut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

- ▶ Le polyèdre est régulier.
- ▶ Les sommets du polyèdre sont sur une sphère.
- ▶ Les angles diédraux sont tous égaux.

■

Corollaire IV.8.7. *En dimension 3, il existe exactement 5 polyèdres réguliers, à savoir le tétraèdre, le cube, l'icosaèdre, l'octaèdre et le dodécaèdre.*

Démonstration. Supposons que l'on dispose d'un polyèdre régulier ayant f faces qui sont chacune un polygone régulier à k côtés et que de chaque sommet partent t arêtes. Si s est le nombre de sommets et a le nombre de d'arêtes du polyèdre, alors

$$k.f = 2a \quad \text{et} \quad t.s = 2a.$$

En effet, chaque arête appartient à deux faces et est déterminée par deux sommets. La formule d'Euler-Poincaré s'écrit,

$$s - a + f = 2$$

c'est-à-dire,

$$2\frac{a}{t} - a + 2\frac{a}{k} = 2$$

ou encore,

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}.$$

Il est clair que $t \geq 3$ et $k \geq 3$, sinon on ne serait pas en présence d'un véritable polyèdre tri-dimensionnel. De plus, $\frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ doit être supérieur à $1/2$ (puisque $1/a > 0$). Recherchons les couples (t, k) tels que

$$t \geq 3, k \geq 3, \frac{1}{t} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}.$$

On a le tableau suivant

| t | k | $1/t + 1/k$ | a | |
|-----|-----|-------------|-----|------------|
| 3 | 3 | 2/3 | 6 | tétraèdre |
| | 4 | 7/12 | 12 | cube |
| | 5 | 8/15 | 30 | dodécaèdre |
| | 6 | 1/2 | | |
| | 7 | < 1/2 | | |
| | ⋮ | ⋮ | | |
| 4 | 3 | 7/12 | 12 | octaèdre |
| | 4 | 1/2 | | |
| | 5 | < 1/2 | | |
| | ⋮ | ⋮ | | |
| 5 | 3 | 8/15 | 30 | icosaèdre |
| | 5 | < 1/2 | | |
| | ⋮ | ⋮ | | |
| 6 | 3 | 1/2 | | |
| | 7 | < 1/2 | | |
| | ⋮ | ⋮ | | |

On a en fait épuisé tous les cas possibles en remarquant que la fonction $\frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ est décroissante en t et en k .

■

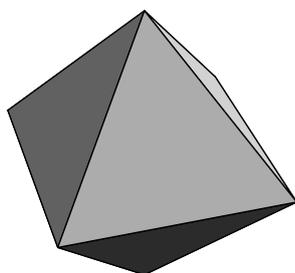
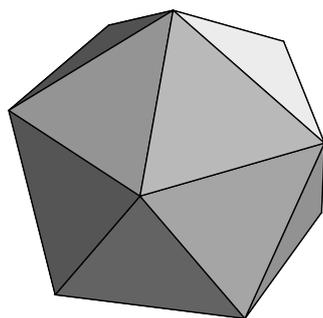
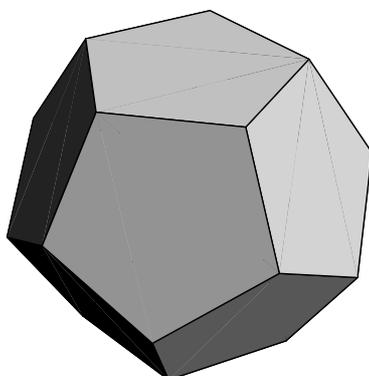


FIGURE IV.18. Dodécaèdre, icosaèdre et octaèdre.

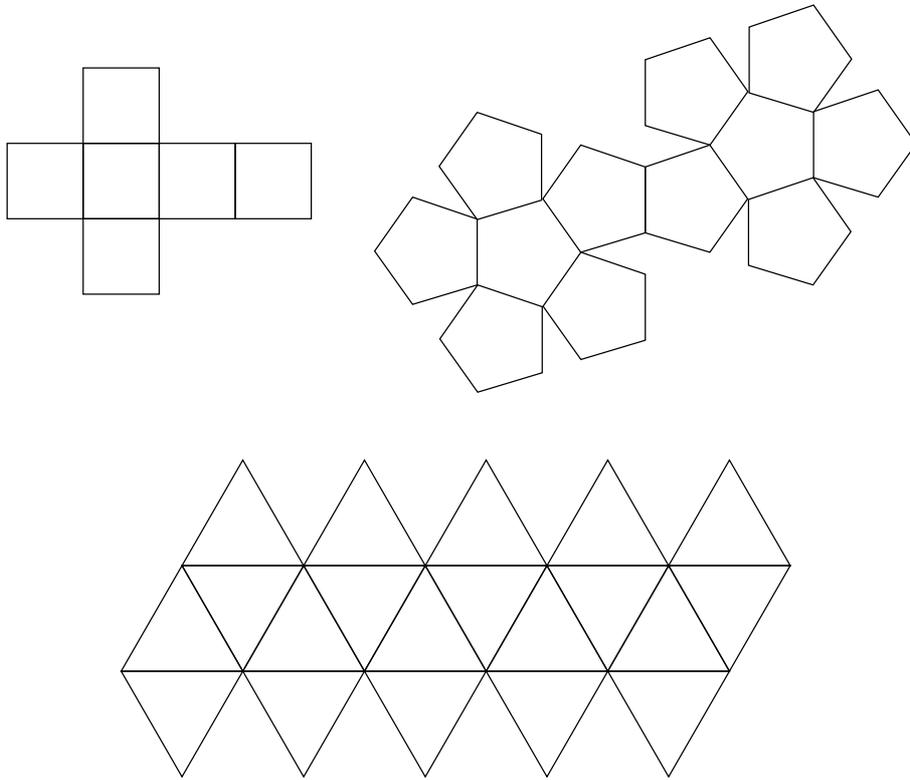


FIGURE IV.19. Développement du cube, du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

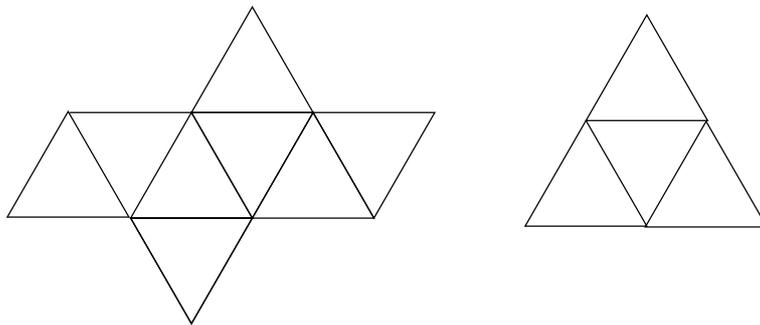


FIGURE IV.20. Développement de l'octaèdre et du tétraèdre.

Applications affines

1. Définition

Définition V.1.1. Soit \mathcal{A} un espace affine. Une application $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est qualifiée d'*application affine* si pour tous points P_1, \dots, P_n et tous nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a

$$\mathcal{T}(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) = \lambda_1 \mathcal{T}(P_1) + \dots + \lambda_n \mathcal{T}(P_n).$$

En d'autres termes, cela signifie que l'image par \mathcal{T} d'une combinaison affine de points est égale à la combinaison affine des images.

Définition V.1.2. Si une application affine \mathcal{T} est aussi une bijection, alors on dit que \mathcal{T} est une *affinité*.

Proposition V.1.3. *La composée d'applications affines est encore une application affine. De même, la composée d'affinités est encore une affinité.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition d'application affine. Pour la seconde partie, on se rappellera que la composée de deux bijections est encore une bijection. ■

Définition V.1.4. Une application affine est une *isométrie* si elle préserve les distances, c'est-à-dire, pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$,

$$d(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B)) = d(A, B).$$

Définition V.1.5. On appelle *point fixe* de $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, tout point $P \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mathcal{T}(P) = P.$$

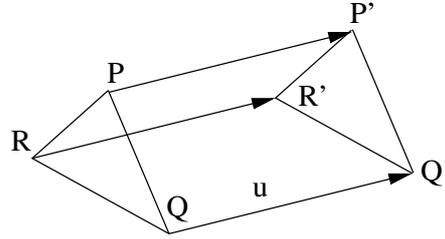
2. Translations

Définition V.2.1. Soit $u \in \vec{\mathcal{A}}$. Une *translation* est une application de la forme

$$t_u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : P \mapsto P + u.$$

Il est facile de vérifier que la translation définie ci-dessus est une application affine. En effet, si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$,

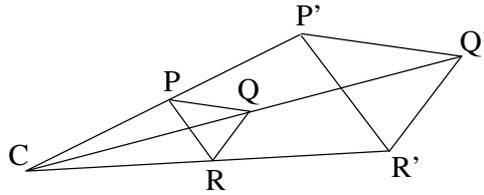
$$\lambda_1(P_1 + u) + \dots + \lambda_n(P_n + u) = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n + \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{=1} u$$

FIGURE V.1. Translation du triangle PQR .

3. Homothéties

Définition V.3.1. L'homothétie de centre $C \in \mathcal{A}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ est l'application

$$h_{C,k} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : P \mapsto C + k \overrightarrow{CP}.$$

FIGURE V.2. Image des points P, Q, R par une homothétie de centre C et de rapport 2.

Il est aisé de vérifier qu'une homothétie est une application affine. Soient P_1, \dots, P_n des points et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, il vient

$$\begin{aligned} & \lambda_1 h_{C,k}(P_1) + \dots + \lambda_n h_{C,k}(P_n) - C \\ &= \lambda_1 (C + k \overrightarrow{CP_1}) + \dots + \lambda_n (C + k \overrightarrow{CP_n}) - C \\ &= k (\lambda_1 \overrightarrow{CP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{CP_n}) \\ &= k (\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n - C). \end{aligned}$$

On remarque que le vecteur dans la dernière parenthèse est le vecteur joignant C au point $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$. Par conséquent, cette dernière quantité est encore égale à

$$h_{C,k}(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) - C.$$

Proposition V.3.2. L'homothétie $h_{C,k}$ de centre C et de rapport $k \neq 0$ transforme une droite ne passant pas (resp. passant) par C en une droite parallèle (resp. en elle-même).

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'un vecteur directeur \overrightarrow{AB} d'une droite est transformé¹ en $k\overrightarrow{AB}$ par $h_{C,k}$.

■

De là, on peut retrouver le théorème de Thalès.

Théorème V.3.3 (Thalès). Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' , deux droites sécantes en C . Soient M et N (resp. M' et N'), deux points distincts de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}') et différents de C . Les droites MM' et NN' sont parallèles si et seulement si il existe k tel que

$$\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN'} = k\overrightarrow{CM'}.$$

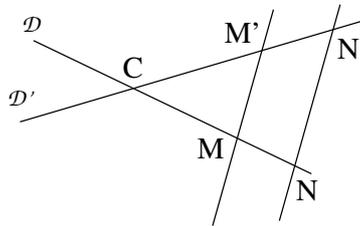


FIGURE V.3. Le théorème de Thalès.

Démonstration. La condition est suffisante. Supposons qu'il existe k tel que $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN'} = k\overrightarrow{CM'}$. Si on considère l'homothétie de centre C et de rapport k , il est clair que $h_{C,k}(M) = N$ et $h_{C,k}(M') = N'$. Au vu de la proposition précédente, les droites MM' et NN' sont parallèles.

La condition est nécessaire. Puisque C , M et N sont alignés, il existe k tel que $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CM}$. Par la proposition précédente, l'homothétie de centre C et de rapport k transforme la droite MM' en une droite parallèle. Puisque $h_{C,k}(M) = N$, l'image de MM' est donc la droite NN' (en effet, c'est la seule droite parallèle à MM' et passant par N). L'image de la droite $M'N'$ par $h_{C,k}$ est elle-même car M' , N' et C sont alignés. Ainsi, on en conclut² que $h_{C,k}(M') = N'$ et donc $\overrightarrow{CN'} = k\overrightarrow{CM'}$.

■

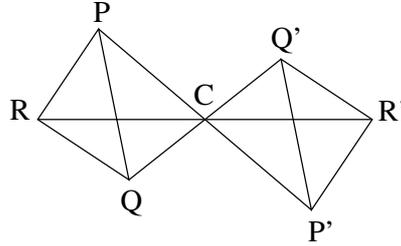
Remarque V.3.4. Une homothétie de centre C et de rapport -1 est une *symétrie centrale* de centre C .

4. Caractérisation

Si on munit l'espace affine d'un repère, le calcul des coordonnées de l'image d'un point par une application affine prend une forme particulière.

¹En effet, $h_{C,k}(A) = A' = C + k\overrightarrow{CA}$ et $h_{C,k}(B) = B' = C + k\overrightarrow{CB}$. Ainsi, $\overrightarrow{A'B'} = B' - A' = k(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$.

² M' est à l'intersection des droites MM' et $M'N'$. Par conséquent, l'image de M' se trouve à l'intersection des images des droites MM' et $M'N'$, c'est-à-dire NN' et $M'N'$.

FIGURE V.4. Symétrie centrale de centre C .

Proposition V.4.1. Soit un espace affine \mathcal{A} muni d'un repère $\mathfrak{R} = (O, (e_1, \dots, e_n))$. L'application $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est affine si et seulement si \mathcal{T} est représentée dans le repère \mathfrak{R} par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées d'un point quelconque de \mathcal{A} dans le repère \mathfrak{R} et M une matrice de \mathbb{R}^n .

Démonstration. La condition est suffisante. Cela résulte directement de la proposition II.6.5 et de la linéarité du produit matriciel.

Supposons à présent que \mathcal{T} est une application affine. Soit A un point quelconque de \mathcal{A} et u un vecteur de $\vec{\mathcal{A}}$. Le vecteur

$$\mathcal{T}(A + u) - \mathcal{T}(A)$$

est indépendant du choix du point A . En effet, si B est un autre point de \mathcal{A} , le point $B + u$ est combinaison affine de A , B et $A + u$:

$$B + u = (A + u) + B - A.$$

Puisque \mathcal{T} est une application affine,

$$\mathcal{T}(B + u) = \mathcal{T}(A + u) + \mathcal{T}(B) - \mathcal{T}(A).$$

Ceci montre que

$$\mathcal{T}(B + u) - \mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(A + u) - \mathcal{T}(A).$$

Ainsi, à un vecteur quelconque $u \in \vec{\mathcal{A}}$, il correspond un unique vecteur $\mathcal{T}(A + u) - \mathcal{T}(A)$ que l'on notera plus simplement $\mathbf{T}(u)$. Cette application $\mathbf{T} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}$ est linéaire, i.e., pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in \vec{\mathcal{A}}$,

$$\mathbf{T}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathbf{T}(u) + \mu \mathbf{T}(v).$$

En effet, le point

$$A + \lambda u + \mu v$$

est la combinaison affine

$$(1 - \lambda - \mu)A + \lambda(A + u) + \mu(A + v)$$

et en utilisant, une fois encore, le fait que \mathcal{T} est une application affine,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\lambda u + \mu v) &= \mathcal{T}[(1 - \lambda - \mu)A + \lambda(A + u) + \mu(A + v)] - \mathcal{T}(A) \\ &= (1 - \lambda - \mu)\mathcal{T}(A) + \lambda\mathcal{T}(A + u) + \mu\mathcal{T}(A + v) - \mathcal{T}(A) \\ &= \lambda \underbrace{[\mathcal{T}(A + u) - \mathcal{T}(A)]}_{\mathbf{T}(u)} + \mu \underbrace{[\mathcal{T}(A + v) - \mathcal{T}(A)]}_{\mathbf{T}(v)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si u se décompose dans la base du repère comme

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i, \quad u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R},$$

pour déterminer $\mathbf{T}(u)$, il suffit de connaître les images $\mathbf{T}(e_i)$ des vecteurs de base e_i car

$$(15) \quad \mathbf{T}(u) = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{T}(e_i).$$

Soit M une matrice dont la i -ème colonne est formée des composantes de $\mathbf{T}(e_i)$ dans la base du repère, l'équation (15) se réécrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{T}(u)]_1 \\ \vdots \\ [\mathbf{T}(u)]_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Si on considère l'origine O du repère et P un point quelconque de coordonnées (x_1, \dots, x_n) , alors $P = O + \overrightarrow{OP}$ et

$$\mathbf{T}(\overrightarrow{OP}) = \mathcal{T}(P) - \mathcal{T}(O).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{T}(P) = \mathbf{T}(\overrightarrow{OP}) + \mathcal{T}(O).$$

En passant aux composantes dans le repère \mathfrak{R} , les composantes de \overrightarrow{OP} sont égales aux coordonnées de P et ainsi, si on pose (z_1, \dots, z_n) comme étant les coordonnées de $\mathcal{T}(O)$, on obtient le résultat annoncé. ■

Remarque V.4.2. La preuve donnée ci-dessus fournit un moyen explicite de calculer la matrice M et le vecteur (z_1, \dots, z_n) . En effet, les colonnes de M sont les composantes des images par \mathbf{T} des vecteurs de la base du repère et (z_1, \dots, z_n) sont les coordonnées de l'image de l'origine du repère.

Exemple V.4.3. Il est facile de vérifier que pour une translation, la matrice M est égale à l'identité I . Pour une homothétie de rapport k , cette matrice est égale à kI .

Remarque V.4.4. On peut montrer que dans un repère orthonormé, une application affine \mathcal{T} est une isométrie si et seulement si la matrice qui représente \mathcal{T} est orthogonale.

Nous avons vu précédemment que le déterminant d'une matrice orthogonale était égal à ± 1 . Cela permet de définir la notion d'isométrie positive (ou négative).

Définition V.4.5. Une isométrie est *positive* (resp. *négative*) si $\det M = 1$ (resp. $\det M = -1$). Avec quelques développements rudimentaires d'algèbre linéaire, on peut aisément vérifier que cette définition ne dépend pas du repère orthonormé choisi.

Considérons à présent le cas de la composée d'applications affines. Soient \mathcal{S} et \mathcal{T} deux applications affines ayant comme représentation dans le repère \mathfrak{R} respectivement

$$x \mapsto Mx + p$$

et

$$x \mapsto Nx + q$$

où $x, p, q \in \mathbb{R}^n$, $M, N \in \mathbb{R}_n^n$. La composée $\mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ se représente par

$$x \mapsto MNx + Mq + p.$$

5. Projections parallèles

Soient π un hyperplan et \mathcal{D} une droite non parallèle à π .

Définition V.5.1. La *projection* du point $A \in \mathcal{A}$ sur π parallèlement à \mathcal{D} est le point d'intersection de π et de la droite passant par A et parallèle à \mathcal{D} . On le note $\text{proj}_{\pi, \mathcal{D}}(A)$.

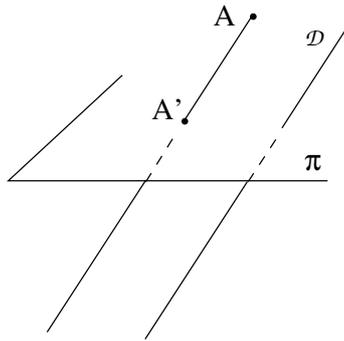


FIGURE V.5. Projection sur π parallèlement à \mathcal{D} .

Remarque V.5.2. Dans le cas particulier d'une droite \mathcal{D} orthogonale à π , on retrouve la notion de projection orthogonale sur π .

Pour vérifier que $\text{proj}_{\pi, \mathcal{D}}$ est une application affine, utilisons la proposition V.4.1. Soit le repère $\mathfrak{R} = (O, (e_1, \dots, e_n))$ ayant pour origine O , le point d'intersection de π et \mathcal{D} , où (e_1, \dots, e_{n-1}) est une base de $\overrightarrow{\pi}$ et où e_n est un vecteur directeur de \mathcal{D} . Si on note E_i , le point $O + e_i$, $i = 1, \dots, n$,

il est clair que $\text{proj}_{\pi, \mathcal{D}}(E_i) = E_i$ si $i < n$ et $\text{proj}_{\pi, \mathcal{D}}(E_n) = O$. De là, on en conclut que $\text{proj}_{\pi, \mathcal{D}}$ se représente dans \mathfrak{R} par

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Définition V.5.3. De manière analogue, on peut définir la *projection* du point $A \in \mathcal{A}$ sur \mathcal{D} parallèlement à π . Ce point, noté $\text{proj}_{\mathcal{D}, \pi}(A)$, est l'intersection de \mathcal{D} et de l'hyperplan passant par A et parallèle à π .

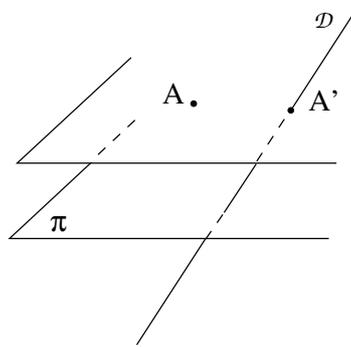


FIGURE V.6. Projection sur \mathcal{D} parallèlement à π .

Avec le même repère que précédemment, cette application se représente par

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Il s'agit donc bien d'une application affine.

Remarque V.5.4. Dans le cas particulier d'un hyperplan π orthogonal à \mathcal{D} , on retrouve la notion de projection orthogonale sur \mathcal{D} .

6. Symétries

Comme à la section précédente, on considère un hyperplan π et une droite \mathcal{D} non parallèle à π .

Définition V.6.1. La *symétrique* du point $A \in \mathcal{A}$ par rapport à π et parallèlement à \mathcal{D} est le point A' , noté $\text{sym}_{\pi, \mathcal{D}}(A)$, tel que AA' soit parallèle à \mathcal{D} et le milieu du segment $[A, A']$ appartienne à π .

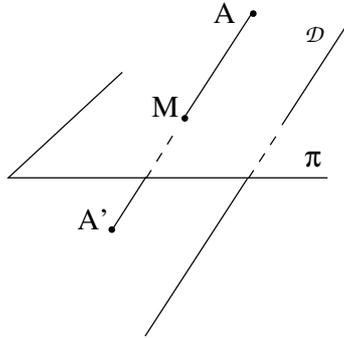


FIGURE V.7. Symétrique du point A par rapport à π et parallèlement à \mathcal{D} .

Si on emploie une fois encore le même repère qu'à la section précédente, on s'aperçoit que cette application est une application affine car elle est représentée par

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Définition V.6.2. Le *symétrique* du point $A \in \mathcal{A}$ par rapport à \mathcal{D} et parallèlement à π est le point A' , noté $\text{sym}_{\mathcal{D},\pi}(A)$, tel que AA' soit parallèle à π et le milieu du segment $[A, A']$ appartienne à \mathcal{D} .

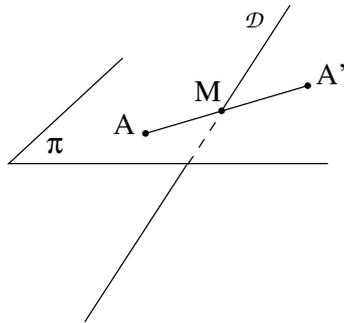


FIGURE V.8. Symétrique du point A par rapport à \mathcal{D} et parallèlement à π .

Dans ce cas, on obtient la représentation

$$x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Remarque V.6.3. Dans les deux cas, si \mathcal{D} et π sont orthogonaux, on retrouve la notion de symétrie orthogonale respectivement par rapport à un hyperplan et par rapport à une droite.

7. Rotations

Nous définissons une rotation comme suit.

Définition V.7.1. Une *rotation* est une isométrie positive possédant un point fixe.

7.1. Cas de la dimension 2. Considérons tout d'abord le cas d'un espace affín euclidien orienté de dimension 2.

Soit \mathcal{R} une rotation admettant le point fixe C , i.e., $\mathcal{R}(C) = C$. On appelle C , le *centre* de la rotation.

Considérons un repère orthonormé positif d'origine C . L'application affine se représente par

$$x \mapsto Mx + p$$

où $M \in \mathbb{R}_2^2$ et $p = 0$ car p s'obtient à partir de l'image de C qui est point fixe de \mathcal{R} et origine du repère. Puisque

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale de déterminant 1, il vient

$$(c, d) = \pm(-b, a)$$

et

$$ad - bc = 1.$$

De là, on tire $(c, d) = (-b, a)$ et $a^2 + b^2 = 1$. Il existe donc un unique nombre $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$. Soit $A \neq C$ un point de \mathcal{A} . L'angle orienté entre \overrightarrow{CA} et $\overrightarrow{C\mathcal{R}(A)}$ vaut θ . En effet, au vu de ce qui précède, si A a pour coordonnées (x_1, x_2) , alors $\mathcal{R}(A)$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Puisque C est l'origine du repère, les coordonnées d'un point quelconque X sont égales aux composantes de \overrightarrow{CX} dans la base du repère. Pour calculer l'angle orienté β entre \overrightarrow{CA} et $\overrightarrow{C\mathcal{R}(A)}$, nous utilisons les formules données à la page 74. Tout d'abord,

$$\cos \beta = \frac{x_1^2 \cos \theta + x_2^2 \cos \theta}{x_1^2 + x_2^2} = \cos \theta$$

et ensuite,

$$\sin \beta = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_2 & x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2 \sin \theta + x_2^2 \sin \theta}{x_1^2 + x_2^2} = \sin \theta.$$

Ainsi, nous venons de prouver le résultat suivant.

Cette définition pourrait paraître assez peu intuitive. Cependant, nous allons très vite retrouver les propriétés habituelles des rotations. Si vous n'êtes pas satisfait par cette définition, interrogez-vous sur la manière dont vous auriez défini une rotation de manière rigoureuse...

Proposition V.7.2. Dans un espace affini euclidien orienté de dimension 2, pour toute rotation \mathcal{R} de centre C , il existe un unique nombre réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que \mathcal{R} se représente dans un repère orthonormé positif d'origine C par

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} x.$$

De plus, pour tout point $A \neq C$, l'angle orienté entre \overrightarrow{CA} et $\overrightarrow{C\mathcal{R}(A)}$ vaut θ .

Remarque V.7.3. On appelle cet angle θ , l'amplitude de la rotation \mathcal{R} de centre C .

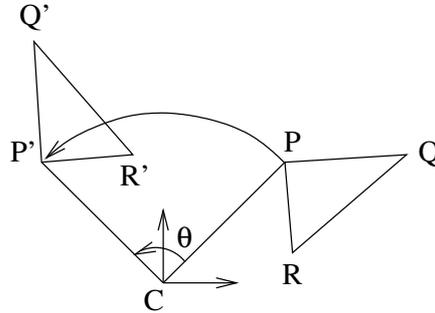


FIGURE V.9. Rotation de centre C et d'amplitude θ .

7.2. Cas de la dimension 3. Considérons à présent le cas d'une rotation dans un espace affini euclidien orienté de dimension 3. Les développements ci-dessous nécessitent des connaissances plus approfondies à propos des vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice.

Soit \mathcal{R} une rotation ayant C comme point fixe. Si on considère un repère d'origine C , la rotation se représente par

$$x \mapsto Mx$$

avec M , une matrice orthogonale 3×3 de déterminant 1. La matrice M possède trois valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Ce sont les solutions de l'équation $\det(M - \lambda I) = 0$. Il est donc clair que M possède soit trois valeurs propres réelles, soit une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées l'une de l'autre. De plus, on vérifie aisément³ que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont toutes de module 1. Le déterminant étant égal au produit des valeurs propres, dans les deux cas, on a toujours au moins une valeur propre égale à 1. (Si M a 1 comme valeur

³Si M est orthogonale, $\widetilde{M}M = I$. Si x est un vecteur propre de M de valeur propre λ (où λ et x peuvent être complexes), alors $Mx = \lambda x$ (et $\widetilde{x}\widetilde{M} = \lambda\widetilde{x}$). De plus, $M\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$. D'où

$$\widetilde{x}\widetilde{M}M\overline{x} = \lambda\widetilde{x}\overline{\lambda}\overline{x} \quad \text{et} \quad \lambda\overline{\lambda} = 1.$$

On verra aussi en algèbre qu'une matrice orthogonale est un cas particulier de matrice unitaire et que les valeurs propres d'une matrice unitaire sont toujours de module 1.

propre triple, alors on est en présence de l'application identité. Nous ne considérerons pas ce cas dans la suite et nous pouvons donc supposer que 1 est valeur propre simple.) Soit $u \neq 0$ un vecteur propre de valeur propre 1 tel que

$$Mu = u.$$

Il est donc clair que les points $C + \lambda u$ ayant λu pour vecteur de coordonnées sont des points fixes de \mathcal{R} et par conséquent, la rotation possède une droite de points fixes passant par C et de direction u . Cette droite est l'axe de la rotation \mathcal{R} .

Considérons un repère $\mathfrak{R} = (C, (e_1, e_2, e_3))$ orthonormé positif tel que $e_1 = u/|u|$. Dans ce repère, la matrice M représentant la rotation est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

car M est une matrice orthogonale et e_1 est un vecteur propre de valeur propre 1. Par un raisonnement analogue au cas de la dimension 2, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Cela nous permet d'affirmer que la restriction de \mathcal{R} à un plan $\alpha = C + ku + \langle e_2, e_3 \rangle$ est une rotation plane de centre $C + ku$ et d'amplitude θ dans le plan ayant comme repère $(C + ku, (e_2, e_3))$.

Nous avons considéré de manière arbitraire $e_1 = u/|u|$. On aurait très bien pu considérer $e_1 = -u/|u|$. Dans ce dernier cas, pour conserver un repère orthonormé positif, il faut échanger les vecteurs e_2 et e_3 , i.e., $\mathfrak{R}' = (C, (-e_1, e_3, e_2))$. Dès lors, la restriction de \mathcal{R} au plan α est une rotation plane de centre $C + ku$ mais cette fois, d'amplitude $2\pi - \theta$.

Ainsi, dans l'espace, l'amplitude d'une rotation n'est pas univoquement définie (elle vaut θ ou $2\pi - \theta$) et on retrouve le même genre de discussions que lors de l'introduction de la notion d'orientation : fixer une base positive de l'espace ne permet pas de définir de manière non ambiguë l'orientation d'un plan (cf. page 75). Si l'on désire lever cette ambiguïté, il faut imposer et préciser le vecteur e_1 choisi.

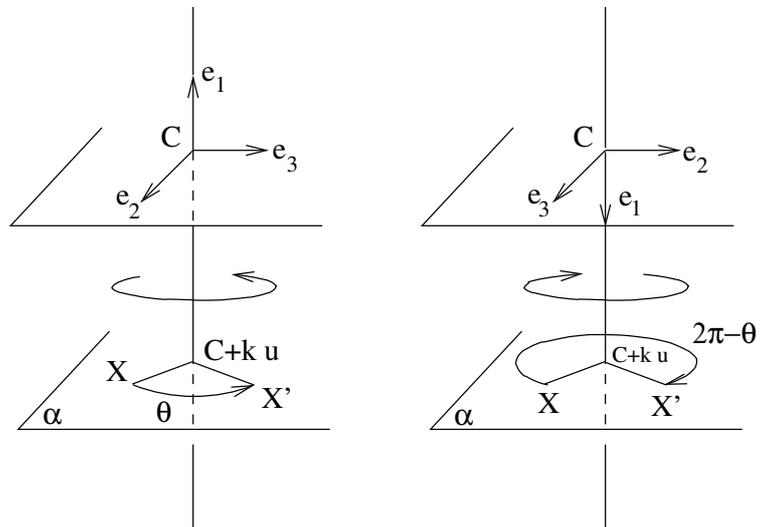


FIGURE V.10. Rotation dans l'espace

CHAPITRE VI

Courbes

Dans ce chapitre, on considère uniquement des espaces affins euclidiens de dimension deux ou trois. Si certaines notions ne peuvent être présentées qu'en dimension deux, nous le précisons le cas échéant. Sinon, par convention, on explicitera uniquement le cas de la dimension trois, le cas de la dimension deux se traitant de manière semblable.

1. Fonctions à valeurs dans \mathcal{A}

Définition VI.1.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} . On dit que P est une *fonction à valeurs dans l'espace affín* \mathcal{A} , si P associe à tout réel u de Ω , un point $P(u)$ de \mathcal{A} . Si on munit \mathcal{A} d'un repère $\mathfrak{R} = (O, (e_1, e_2, e_3))$ (que nous supposons orthonormé), en passant aux composantes, la fonction P s'écrit¹

$$P : \Omega \rightarrow \mathcal{A} : u \mapsto P(u) = \begin{pmatrix} P_1(u) \\ P_2(u) \\ P_3(u) \end{pmatrix}$$

où les P_i sont des fonctions à valeurs réelles, $i = 1, 2, 3$. Ainsi, nous dirons que P est continu, dérivable, de classe C_k , etc... si les fonctions P_i le sont au sens habituel de l'analyse.

Remarque VI.1.2. Les notions de continuité, dérivabilité, etc... ne dépendent pas du repère choisi. En effet, pour passer d'un repère \mathfrak{R} à un repère \mathfrak{R}' , la formule de changement de repère stipule que les coordonnées de points dans \mathfrak{R}' s'obtiennent au moyen de fonctions linéaires à partir des coordonnées de ces mêmes points dans \mathfrak{R} . Puisqu'une combinaison linéaire de fonctions de classe C_k est encore de classe C_k , on en conclut que ces notions ne dépendent pas du repère choisi.

Il est parfois commode de considérer P comme une *fonction à valeurs dans l'espace vectoriel* $\vec{\mathcal{A}}$. En effet, il suffit de considérer la fonction

$$u \in \Omega \mapsto \vec{OP}(u) \in \vec{\mathcal{A}}.$$

Pour rappel, les coordonnées de P dans le repère \mathfrak{R} et les composantes de \vec{OP} dans la base du repère coïncident par définition.

¹Le repère considéré étant sous-entendu, on s'autorise, par abus d'écriture, à évaluer le point $P(u) \in \mathcal{A}$ et son vecteur de coordonnées $(P_1(u), P_2(u), P_3(u)) \in \mathbb{R}^3$ bien qu'il s'agisse de deux objets distincts.

Si P est dérivable dans $\Omega \subset \mathbb{R}$, alors

$$(16) \quad D_u P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(u+h) - P(u)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \overrightarrow{P(u)P(u+h)}$$

est un vecteur dont les composantes dans la base du repère considéré sont $(D_u P_1, D_u P_2, D_u P_3)$.

2. Arc régulier de courbe

Définition VI.2.1. Un *paramétrage* (Ω, P) de classe C_k ($k \geq 1$) est la donnée d'un intervalle ouvert Ω de \mathbb{R} et d'une fonction $P : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ telle que

- ▶ P soit de classe C_k ,
- ▶ $D_u P(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$.

On appelle *arc régulier de courbe* Γ (en abrégé, a.r.c.) l'ensemble des valeurs prises par une telle fonction, i.e.,

$$\Gamma = \{P(u) \mid u \in \Omega\}.$$

On appelle *courbe*, toute union finie d'a.r.c.

Exemple VI.2.2. Voici quelques exemples de courbes et d'a.r.c. Commençons par quelques courbes planes. Le couple formé par $\Omega =]0, 12\pi[$ et

$$P : u \mapsto \left(\sin \frac{u}{3}, \sin \frac{u}{2} \right)$$

est un paramétrage de classe C_∞ d'un a.r.c. car

$$D_u P(u) = \left(\frac{1}{3} \cos \frac{u}{3}, \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \right) \neq (0, 0), \quad \forall u \in]0, 12\pi[.$$

La courbe ainsi définie porte le nom de *courbe de Lissajou*².

De même, on peut considérer l'a.r.c. dont un paramétrage est donné par $\Omega =]1, +\infty[$ et $P(u) = \left(\frac{\cos u}{u}, \frac{\sin u}{u} \right)$. Une portion de la courbe correspondante est représentée à la figure VI.2.

L'exemple qui suit est une courbe constituée de plusieurs a.r.c. Soit la fonction à valeurs dans l'espace affiné \mathbb{R}^2

$$P : u \mapsto P(u) = (u - \sin u, 1 - \cos u).$$

Il est facile de vérifier que $D_u P = 0$ si $u = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on a par exemple un a.r.c. pour les intervalles respectifs $]0, 2\pi[$ et $]2\pi, 4\pi[$. L'union de ces deux a.r.c. forme une courbe qui est représentée à la figure VI.3.

Enfin, considérons l'a.r.c. dont un paramétrage est donné par $\Omega =]0, 2\pi[$ et $P(u) = (\cos u - \cos 9u, \sin u - \sin 9u)$ et qui est représenté à la figure VI.4.

Passons à présent à quelques courbes dans l'espace avec tout d'abord une *hélice circulaire* (à pas constant a) donnée par le paramétrage

$$P(u) = \left(R \cos u, R \sin u, \frac{a}{2\pi} u \right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

²On rencontre notamment cette courbe dans l'étude de phénomènes oscillatoires.

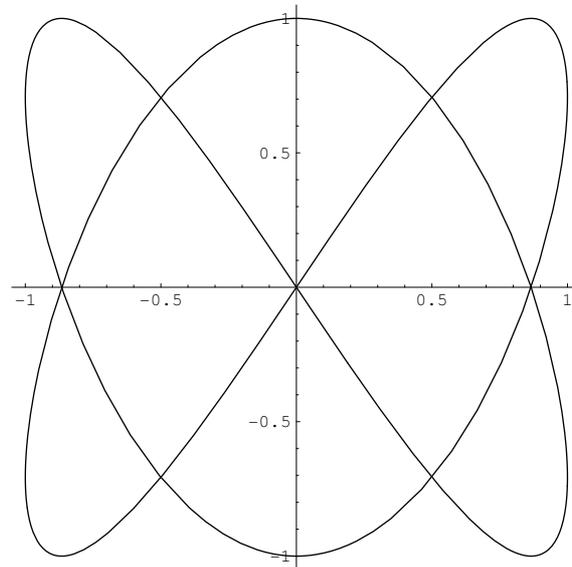
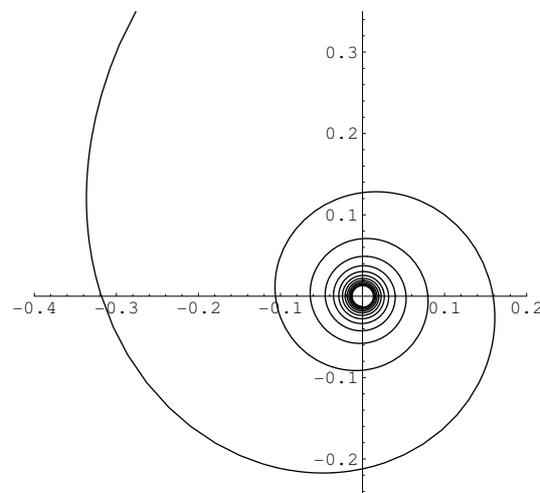
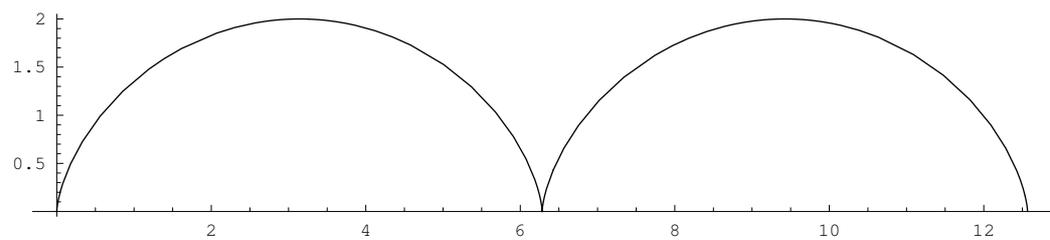
FIGURE VI.1. $P(u) = (\sin \frac{u}{3}, \sin \frac{u}{2})$, $u \in]0, 12\pi[$.FIGURE VI.2. $P(u) = (\frac{\cos u}{u}, \frac{\sin u}{u})$, $u \in]1, +\infty[$.

FIGURE VI.3. Deux arcades de cycloïde.

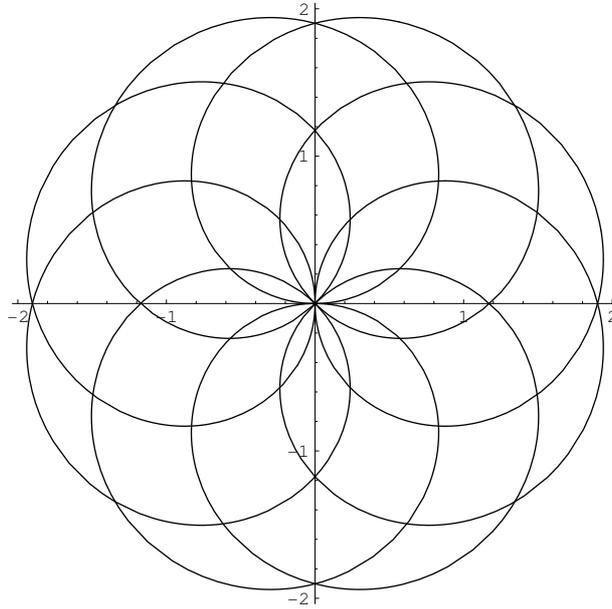


FIGURE VI.4. $P(u) = (\cos u - \cos 9u, \sin u - \sin 9u)$, $u \in]0, 2\pi[$.

Il est aisé de vérifier qu'il s'agit d'un a.r.c. (puisque la troisième composante de $D_u P$ n'est jamais nulle) dont une section a été représentée à la figure VI.5.

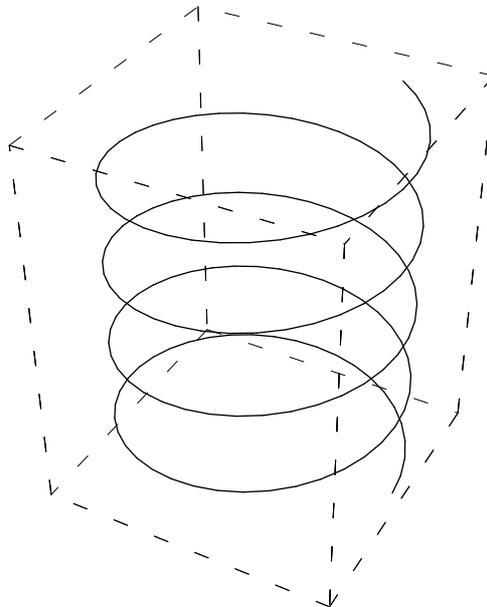


FIGURE VI.5. Hélice circulaire.

On peut, pour conclure ces quelques exemples, définir un a.r.c. s'enroulant (ici, 6 fois) sur une sphère de rayon R par

$$P(u) = (R \sin u \cos 12u, R \sin u \sin 12u, R \cos u), u \in]0, \pi[.$$

La courbe ainsi paramétrée est représentée à la figure VI.6.

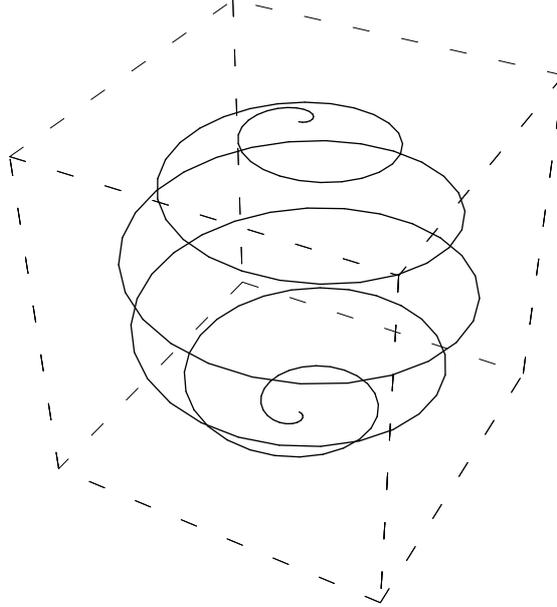


FIGURE VI.6. Hélice sphérique.

Définition VI.2.3. On appelle *point k -uple*, $k \geq 1$, d'un a.r.c., tout point qui correspond à k valeurs distinctes du paramètre. Par exemple, pour la courbe de Lissajou donnée précédemment, on a six points doubles

$$P(2\pi) = P(8\pi), P(4\pi) = P(10\pi), P\left(\frac{5}{2}\pi\right) = P\left(\frac{13}{2}\pi\right),$$

$$P\left(\frac{11}{2}\pi\right) = P\left(\frac{19}{2}\pi\right), P\left(\frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{17}{2}\pi\right), P\left(\frac{7}{2}\pi\right) = P\left(\frac{23}{2}\pi\right).$$

D'une manière générale, on appelle *point multiple* un point k -uple tel que $k > 1$. Dans la suite de ces notes, nous considérerons uniquement des a.r.c. sans point multiple.

3. Paramétrages équivalents

Considérons un exemple simpliste. Soit le demi-cercle qui est un a.r.c. paramétré par $P(u) = (\cos u, \sin u)$ pour $u \in \Omega =]0, \pi[$. Cet a.r.c. aurait pu tout aussi bien être paramétré par $Q(u') = (\sin u', \cos u')$ pour $u' \in \Lambda =]-\pi/2, \pi/2[$. On remarque qu'on peut passer d'un paramétrage à l'autre de la manière suivante,

$$\forall u \in \Omega, P(u) = Q\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

Cela permet dès lors d'introduire la notion de paramétrages équivalents.

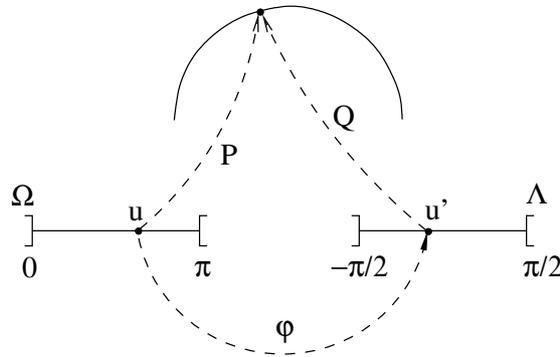


FIGURE VI.7. Deux paramétrages du demi-cercle.

Définition VI.3.1. Deux paramétrages (Ω, P) et (Λ, Q) de classe C_k sont dits *équivalents* s'il existe une bijection $\varphi : \Omega \rightarrow \Lambda$ de classe C_k telle que

$$\forall u \in \Omega : P(u) = Q(\varphi(u)).$$

Dans ce cas, les deux paramétrages définissent le même a.r.c., i.e.,

$$P(\Omega) = Q(\Lambda)$$

et on appelle φ , le *changement de paramètres*.

Ainsi, dans l'exemple précédent, les deux paramétrages sont équivalents et la bijection φ est donnée par³

$$\varphi : \Omega =]0, \pi[\rightarrow \Lambda =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: u \mapsto \frac{\pi}{2} - u.$$

4. Tangente

Soit Γ un a.r.c. de paramétrage (Ω, P) . Ainsi, $D_u P \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$. La formule (16) permet d'interpréter $(D_u P)(u_0)$ comme la limite des vecteurs directeurs des droites passant par $P(u_0)$ et $P(u_0 + h)$ lorsque h tend vers 0 (c'est-à-dire, lorsque $P(u_0 + h)$ se rapproche de $P(u_0)$). Nous dirons donc que $(D_u P)(u_0)$ est un *vecteur tangent* à Γ en $P(u_0)$. La droite passant par $P(u_0)$ et ayant $(D_u P)(u_0)$ pour vecteur directeur est la *tangente* à Γ au point $P(u_0)$.

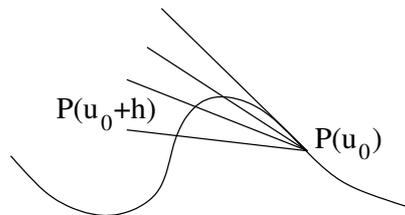


FIGURE VI.8. Tangente à un a.r.c.

³Bien évidemment, $\varphi^{-1} : \Lambda \rightarrow \Omega$ est aussi un changement de paramètres tel que pour tout $u' \in \Lambda$, $Q(u') = P(\varphi^{-1}(u'))$.

Ces deux notions sont indépendantes du paramétrage choisi. En effet, si (Λ, Q) est un paramétrage équivalent de Γ et si $\varphi : \Omega \rightarrow \Lambda$ est le changement de paramètres, on a⁴

$$(D_u P)(u_0) = [D_u Q(\varphi)]_{u_0} = [D_{u'} Q]_{\varphi(u_0)} [D_u \varphi]_{u_0}.$$

Ceci montre qu'à une constante multiplicative $[D_u \varphi]_{u_0}$ près, les deux vecteurs tangents en $P(u_0) = Q(\varphi(u_0))$ sont identiques. De plus, $[D_u \varphi]_{u_0}$ diffère de zéro car puisque $(\varphi^{-1} \varphi)(u) = u$, en dérivant les deux membres, on obtient

$$[D_{u'} \varphi^{-1}]_{\varphi(u)} [D_u \varphi]_u = 1.$$

5. Orientation

Si un a.r.c. est donné par un paramétrage (Ω, P) , alors ce paramétrage fournit naturellement un sens de parcours de l'a.r.c. Ainsi, on dira que le point $P(u_0)$ est *avant* le point $P(u_1)$ si $u_0 < u_1$. L'orientation dépend du paramétrage choisi. En effet, supposons disposer de deux paramétrages équivalents où φ est le changement de paramètres. Nous venons de voir que $D_u \varphi$ ne s'annulait jamais dans Ω . Par conséquent⁵, il ne peut changer de signe et reste donc constamment positif (ou négatif). Si $D_u \varphi > 0$ (resp. < 0), alors φ est strictement croissant (resp. décroissant) et les deux paramétrages définissent la même orientation de l'a.r.c. (resp. des orientations de sens opposés). Dans l'exemple du demi-cercle, les deux paramétrages four-

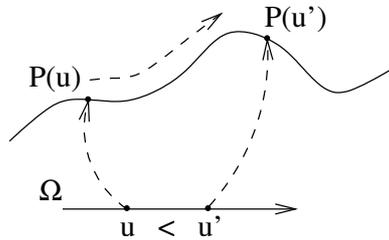


FIGURE VI.9. Sens de parcours.

nissent chacun une orientation différente (en effet, $\varphi(u) = \frac{\pi}{2} - u$ et $D_u \varphi < 0$).

6. Longueur d'arc et abscisse curviligne

Soient Γ un a.r.c. de paramétrage (Ω, P) et $a < b$ deux points de Ω . Intuitivement⁶, si δt est suffisamment petit, la portion de courbe comprise entre $P(t)$ et $P(t + \delta t)$ est proche d'un segment de droite et sa longueur est donc proche de $|P(t + \delta t) - P(t)|$. De plus, si δt est suffisamment petit, $\frac{1}{\delta t}(P(t + \delta t) - P(t))$ est proche de $D_t P$. De là, on en tire que la longueur

⁴On s'autorise à écrire indifféremment $(D_x f)(x_0)$ ou $[D_x f]_{x_0}$ pour représenter la dérivée de la fonction f , évaluée au point x_0 et on utilise le théorème de dérivation de fonctions de fonction.

⁵ $D_u \varphi$ étant au moins continu.

⁶Pour les détails, cf. le cours d'analyse.

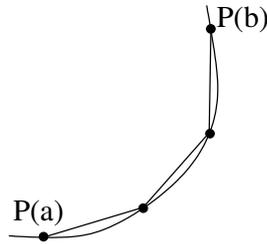


FIGURE VI.10. Découpage d'une portion d'a.r.c.

de l'arc entre $P(t)$ et $P(t + \delta t)$ est proche de $\delta t |D_t P|$. Pour calculer la longueur d'une portion quelconque d'un a.r.c., il suffit de le diviser en sections correspondant à un incrément de δt en t et de sommer les longueurs des différentes sections obtenues. On obtient la longueur de l'arc entre a et b en faisant tendre δt vers 0. Ainsi, la *longueur d'arc* entre $P(a)$ et $P(b)$ est donnée par

$$\int_a^b |D_t P| dt.$$

Nous sommes à présent en mesure de définir l'abscisse curviligne. Soient Γ un a.r.c. de paramétrage (Ω, P) et u_0 un point de Ω . Le point $P(u_0)$ va en quelque sorte être utilisé comme origine à partir de laquelle on va mesurer les abscisses curvilignes. On introduit la fonction

$$s_{u_0}(u) = \int_{u_0}^u |D_t P| dt, \quad u \in \Omega.$$

On utilise ici la variable d'intégration t pour éviter toute confusion avec u . Cette fonction $s_{u_0} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ associe donc à tout point P de Γ un nombre réel appelé l'*abscisse curviligne* de P . Nous allons montrer que ce nombre

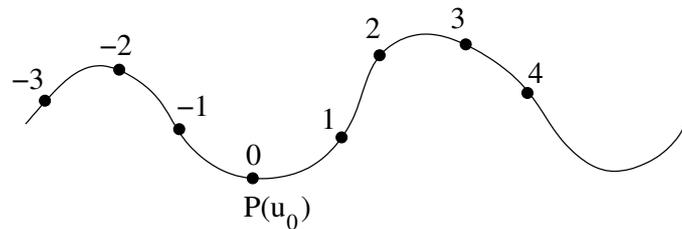


FIGURE VI.11. Abscisse curviligne.

dépend uniquement de l'orientation de Γ et du point P_0 .

Soit un second paramétrage (Λ, Q) de l'a.r.c. Γ dont $\varphi : \Lambda \rightarrow \Omega$ est le changement de paramètres⁷. Posons u'_0 et u' tels que $\varphi(u'_0) = u_0$ et $\varphi(u') = u$

⁷Attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'il s'agit cette fois d'un changement de paramètres entre (Λ, Q) et (Ω, P) .

pour tout $u \in \Omega$. Puisque $Q(u') = P(\varphi(u'))$, l'abscisse curviligne du point $Q(u')$ pour ce paramétrage est donnée par

$$\begin{aligned} s'_{u'_0}(u') &= \int_{u'_0}^{u'} |D_{t'} Q| dt' = \int_{u'_0}^{u'} |D_{t'} P(\varphi(t'))| dt' \\ &= \int_{u'_0}^{u'} |[D_t P]_{\varphi(t')}| |D_{t'} \varphi| dt' = \alpha \int_{u'_0}^{u'} |[D_t P]_{\varphi(t')}| D_{t'} \varphi dt' \end{aligned}$$

où $\alpha = 1$ (resp. -1) si les deux paramétrages ont même orientation (resp. des orientations opposées). Si nous considérons à présent le changement de variables donné par φ dans l'intégrale sur \mathbb{R} précédente, on trouve

$$s'_{u'_0}(u') = \alpha \int_{u_0}^u |D_t P| dt = \alpha s_{u_0}(u).$$

Remarque VI.6.1. Si on remplace le point privilégié $P(u_0)$ pris pour origine par un point $P(u_1)$, la nouvelle abscisse curviligne $s_{u_1}(u)$ est telle que

$$s_{u_1}(u) = s_{u_0}(u) - c$$

où c est l'abscisse curviligne du point $P(u_1)$ lorsqu'on prend $P(u_0)$ comme origine. En effet,

$$\underbrace{\int_{u_1}^u |D_t P| dt}_{=s_{u_1}(u)} = \int_{u_1}^{u_0} |D_t P| dt + \int_{u_0}^u |D_t P| dt = \underbrace{\int_{u_0}^u |D_t P| dt}_{=s_{u_0}(u)} - \underbrace{\int_{u_0}^{u_1} |D_t P| dt}_{=s_{u_0}(u_1)}.$$

Dans la suite, si l'origine $P(u_0)$ est fixée, on s'autorisera à écrire simplement $s(u)$ à la place de $s_{u_0}(u)$.

Définition VI.6.2. Comme nous le verrons plus loin, il est souvent intéressant d'avoir des vecteurs tangents normés. Ainsi, un paramétrage (Ω, P) d'un a.r.c. est dit *naturel*, si

$$|D_u P| = 1, \forall u \in \Omega.$$

Proposition VI.6.3. Soit Γ un a.r.c. paramétré par (Ω, P) . La fonction

$$\varphi : u \in \Omega \mapsto \int_{u_0}^u |D_t P| dt$$

est un changement de paramètres qui transforme (Ω, P) en un paramétrage naturel.

Remarque VI.6.4. La fonction φ n'est autre que l'abscisse curviligne s .

Démonstration. Soit (Λ, Q) le second paramétrage de Γ tel que $\Lambda = s(\Omega)$ et que

$$P(u) = Q(s(u)), \forall u \in \Omega.$$

En dérivant, on trouve

$$(17) \quad [D_u P]_u = [D_t Q]_{s(u)} [D_u s]_u.$$

Nous devons vérifier que $|D_t Q| = 1$, pour tout $t \in \Lambda$. Puisque s est une bijection, il vient aussi

$$Q(t) = P(s^{-1}(t)), \quad \forall t \in \Lambda$$

et en dérivant,

$$(18) \quad [D_t Q]_t = [D_u P]_{s^{-1}(t)} [D_t s^{-1}]_t.$$

En posant $t = s(u)$ dans (18) et en effectuant ensuite le quotient de (18) par (17), on retrouve la formule classique⁸

$$[D_t s^{-1}]_t = \frac{1}{[D_u s]_u} = \frac{1}{[D_u s]_{s^{-1}(t)}}.$$

La conclusion en découle, $s(u)$ étant une primitive de $|D_u P|$. ■

Le schéma suivant récapitule les différentes fonctions intervenant dans la démonstration précédente.

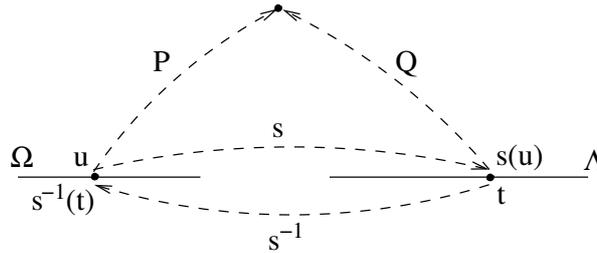


FIGURE VI.12. Changement de paramètres et paramétrage naturel.

Exemple VI.6.5. La *spirale logarithmique* donnée par

$$P(u) = (e^u \cos u, e^u \sin u), \quad u \in \mathbb{R}$$

est bien un a.r.c., car

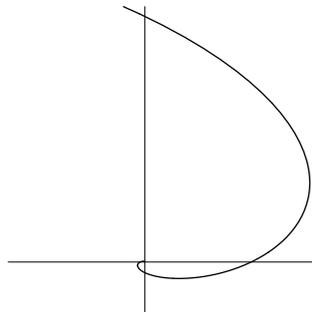


FIGURE VI.13. Spirale logarithmique.

⁸On note souvent $u(s)$ le changement de variables inverse du changement de variables $s(u)$.

$$D_u P = (e^u(\cos u - \sin u), e^u(\sin u + \cos u))$$

et

$$|D_u P|^2 = e^{2u}((\cos u - \sin u)^2 + (\sin u + \cos u)^2) = 2e^{2u}$$

qui diffère de zéro pour tout $u \in \mathbb{R}$. En particulier, ce paramétrage n'est pas un paramétrage naturel puisque $2e^{2u}$ n'est pas égal à 1 pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour appliquer le résultat précédent, la fonction

$$u \mapsto s = \int_0^u \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2}(e^u - 1)$$

est un changement de paramètres donnant un paramétrage naturel. De là, on trouve

$$u = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

et en remplaçant u dans le paramétrage de départ, on trouve

$$P'(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right) \right).$$

Il est laissé au lecteur peu convaincu le soin fastidieux de vérifier que $|D_s P'| = 1$.

Remarque VI.6.6. Comme le montre l'exemple précédent, la proposition VI.6.3 peut fournir, à partir d'un paramétrage quelconque, un paramétrage naturel équivalent au moyen de calculs compliqués voire impossibles (en effet, on peut très vite être en présence d'intégrales elliptiques ne pouvant être évaluées en termes de fonctions familières). Néanmoins, ce résultat revêt un intérêt théorique immédiat. Puisque toute courbe possède un paramétrage naturel, nous pourrions dans la suite, et ce, sans aucune restriction, supposer disposer d'un tel paramétrage.

7. Dérivation de fonctions vectorielles

Proposition VI.7.1. Soient $u(t), v(t), w(t)$ trois fonctions définies sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathcal{A} . Si on représente la dérivée par rapport au paramètre t par \cdot' , on a

- ▶ $\langle u, v \rangle' = \langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle$,
- ▶ $(u \wedge v)' = u' \wedge v + u \wedge v'$,
- ▶ $[u, v, w]' = [u', v, w] + [u, v', w] + [u, v, w']$.

Démonstration. Les deux premières règles s'obtiennent en passant aux composantes dans une base orthonormée et en utilisant les règles de dérivation habituelles. Pour la troisième,

$$\begin{aligned} [u, v, w]' &= \langle u \wedge v, w \rangle' \\ &= \langle (u \wedge v)', w \rangle + \langle u \wedge v, w' \rangle \\ &= \langle u' \wedge v, w \rangle + \langle u \wedge v', w \rangle + \langle u \wedge v, w' \rangle \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

Corollaire VI.7.2. Si $u(t)$ est une fonction vectorielle définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ telle que $|u|$ est constant pour tout $t \in \Omega$, alors u' est un vecteur orthogonal à u .

Démonstration. En effet, puisque $|u|^2 = \langle u, u \rangle$ est constant, en dérivant on trouve

$$\langle u', u \rangle + \langle u, u' \rangle = 0,$$

c'est-à-dire $\langle u, u' \rangle = 0$.

■

8. Courbure et normale principale (cas général)

Définition VI.8.1. Si Γ est un a.r.c. de paramétrage naturel (Ω, P) et dont le paramètre est l'abscisse curviligne s , on définit la *courbure* $\kappa(s)$ de Γ au point $P(s)$ par

$$\kappa(s) = |\ddot{P}|$$

où un point dénote une dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s . Si on dénote par \vec{t} le vecteur \dot{P} tangent à Γ au point $P(s)$, alors on a aussi

$$\kappa(s) = |\dot{\vec{t}}|.$$

Remarque VI.8.2. Puisqu'on dispose d'un paramétrage naturel, le vecteur \vec{t} introduit ci-dessus est nécessairement unitaire.

Montrons sur deux exemples que cette définition *a priori* artificielle rend bien ce à quoi l'on pourrait s'attendre : la courbure d'une droite doit être nulle et si la courbure traduit l'écartement par rapport à la tangente, plus le rayon d'un cercle est grand, plus sa courbure doit être faible.

Exemple VI.8.3. La droite passant par Q et de vecteur directeur w est paramétrée par (Ω, P) où $\Omega = \mathbb{R}$ et $P(s) = Q + s \frac{w}{|w|}$. Il s'agit bien d'un paramétrage naturel car $D_s P = \frac{w}{|w|}$ est un vecteur unitaire. De là,

$$\kappa(s) = |\ddot{P}| = 0$$

puisque $D_s P$ est indépendant de s .

Exemple VI.8.4. Un paramétrage naturel du cercle de rayon R et dont le centre a pour coordonnées (x_0, y_0) est donné par

$$P(s) = (x_0 + R \cos \frac{s}{R}, y_0 + R \sin \frac{s}{R}).$$

De là, on obtient

$$\dot{P} = (-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}) \text{ et } \ddot{P} = (-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}).$$

Ainsi, la courbure au point $P(s)$ est donnée par $\kappa(s) = \frac{1}{R}$. Dès lors, plus le rayon du cercle est grand, plus sa courbure est proche de zéro.

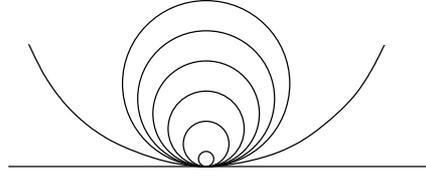


FIGURE VI.14. Courbure d'un cercle.

Remarque VI.8.5. Bien évidemment, la définition de la courbure donnée ci-dessus est indépendante du paramétrage choisi. En effet, nous avons vu que deux paramétrages naturels équivalents de paramètres respectifs s et u sont tels que

$$u = \pm s + c.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} D_s P(u(s)) &= [D_u P]_{u(s)} D_s u = \pm [D_u P]_{u(s)} \\ D_s^2 P(u(s)) &= \pm D_s [D_u P]_{u(s)} = \pm D_u^2 P D_s u = \pm (\pm D_u^2 P) \end{aligned}$$

d'où $D_s^2 P(u(s)) = D_u^2 P$.

Définition VI.8.6. Puisque \vec{t} est un vecteur unitaire, au vu du corollaire VI.7.2, sa dérivée lui est orthogonale. Ainsi, si la courbure n'est pas nulle⁹, on peut définir un vecteur \vec{n} tel que

$$\ddot{P} = \dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n}$$

où ce vecteur $\vec{n} = \dot{\vec{t}} / |\dot{\vec{t}}|$ est un vecteur normé appelé *normale principale*. Comme κ est positif, on dit que la concavité de la courbe est orientée dans le sens de sa normale principale.

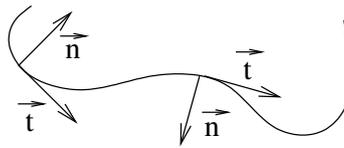


FIGURE VI.15. Concavité orientée dans le sens de la normale principale.

Remarque VI.8.7. Le plan $P(s) + \langle \vec{t}, \vec{n} \rangle$ s'appelle le *plan osculateur* à la courbe au point $P(s)$. En adaptant sans difficulté la formule de Taylor au cas de fonctions à valeurs dans \mathcal{A} , on a

$$P(s+h) = P(s) + h \underbrace{\dot{P}}_{\vec{t}} + \frac{h^2}{2} \underbrace{\ddot{P}}_{\kappa \vec{n}} + \mathcal{O}(h^3).$$

Au premier ordre, la droite $P(s) + \langle \vec{t} \rangle$ incluse dans le plan osculateur approxime au mieux la courbe (car la droite et la courbe ont même tangente). Au second ordre, le cercle de centre $C(s) = P(s) + \frac{1}{\kappa} \vec{n}$, de rayon $\frac{1}{\kappa}$ et

⁹Si la courbure était nulle, le vecteur \vec{n} ne serait pas univoquement défini.

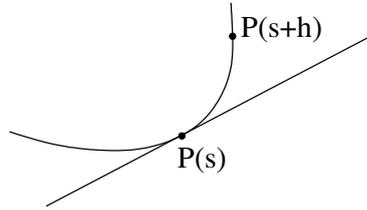


FIGURE VI.16. Approximation au premier ordre.

inclus dans le plan osculateur approxime au mieux la courbe car le cercle et la courbe ont au point $P(s)$ même tangente, même normale principale et même courbure¹⁰. On l'appelle le *cercle osculateur* à la courbe au point $P(s)$. C'est pour cette raison, quand $\kappa \neq 0$, que l'on parle parfois du *rayon*

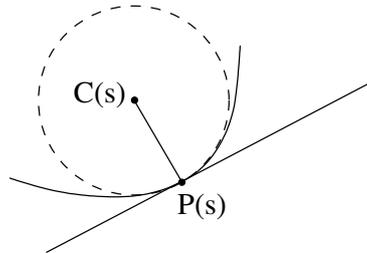


FIGURE VI.17. Approximation au second ordre.

de courbure $R = \frac{1}{\kappa}$ et du *centre de courbure* $C(s)$.

9. Trièdre de Frenet

Dans la section précédente, pour une courbe donnée par un paramétrage naturel $P(s)$ où s désigne l'abscisse curviligne, nous avons introduit le vecteur tangent \vec{t} , la courbure κ et la normale principale \vec{n} au point $P(s)$. Nous supposons ici l'espace \mathbb{R}^3 orienté. Le but de cette section est de présenter le trièdre de Frenet. Il s'agit d'un repère mobile de l'espace dont l'origine est un point $P(s)$ de la courbe considérée. L'intérêt principal est d'en permettre une étude locale plus aisée.

Définition VI.9.1. Le vecteur $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$ est la *binormale* à la courbe au point $P(s)$. Ainsi, $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est une base orthonormée positive de l'espace. On l'appelle le *trièdre de Frenet*.

Proposition VI.9.2 (Formules de Frenet¹¹). Soit Γ un a.r.c. donné par un paramétrage naturel d'abscisse curviligne s . Lorsque $\kappa \neq 0$, avec les

¹⁰Par construction même, il est clair que la courbe et le cercle ont même tangente et normale principale. Pour la courbure, on se rappellera l'exemple VI.8.4.

¹¹On parle parfois des formules de Frenet-Serret ou Serret-Frenet.

notations introduites précédemment, on a

$$\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n} \end{aligned} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

où τ est une fonction de s .

Démonstration. Par définition, \vec{n} est un vecteur normé. Au vu du corollaire VI.7.2, sa dérivée lui est orthogonale. Ainsi, $\dot{\vec{n}}$ est combinaison linéaire de \vec{t} et de \vec{b} . Par définition, τ est son coefficient selon \vec{b} . Puisque $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est une base orthonormée, pour rechercher le coefficient de $\dot{\vec{n}}$ selon \vec{t} , il suffit de calculer

$$\langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle = \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle}_{0} - \langle \vec{n}, \dot{\vec{t}} \rangle = -\langle \vec{n}, \kappa \vec{n} \rangle = -\kappa.$$

Enfin, pour la troisième formule, il vient

$$\begin{aligned} \dot{\vec{b}} &= (\vec{t} \wedge \dot{\vec{n}}) \\ &= \dot{\vec{t}} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge \dot{\vec{n}} \\ &= \kappa \vec{n} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge (-\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}) \\ &= -\tau \vec{n}. \end{aligned}$$

■

Remarque VI.9.3. La troisième formule de Frenet indique comment la direction du plan osculateur varie : sa normale a tendance à pivoter autour de la direction de la tangente à la courbe et ce, d'autant plus fort que $|\tau|$ est grand. On appelle dès lors τ , la *torsion* de la courbe au point $P(s)$. Lorsque $\tau \neq 0$, on appelle $T = 1/\tau$ le *rayon de torsion*.

Remarque VI.9.4. Comme à la remarque VI.8.5, nous devons vérifier que la torsion ne dépend pas du paramétrage choisi. Si on dispose d'un second paramétrage naturel,

$$u = \pm s + c,$$

alors le changement de paramètres a les effets suivants

$$\vec{t} \mapsto \pm \vec{t}, \quad \dot{\vec{t}} \mapsto \dot{\vec{t}}, \quad \vec{n} \mapsto \vec{n}, \quad \vec{b} \mapsto \pm \vec{b}, \quad \dot{\vec{b}} \mapsto \dot{\vec{b}}.$$

Par conséquent, τ reste inchangé.

La proposition suivante permet le calcul de la courbure et de la normale principale dans le cas d'un paramétrage quelconque. (En effet, comme nous l'a montré l'exemple VI.6.5, l'obtention d'un paramétrage naturel peut s'avérer délicat.)

Proposition VI.9.5. Soit Γ un a.r.c. de paramétrage (Ω, P) . Si on désigne par \cdot' la dérivée par rapport au paramètre u , alors

$$\kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3}$$

et si $\kappa \neq 0$, la normale principale est donnée par

$$\vec{n} = \frac{(P' \wedge P'') \wedge P'}{|P' \wedge P''| |P'|}.$$

Démonstration. Rappelons que nous notons par un point (resp. un prime) la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne s (resp. par rapport au paramètre u). Puisque $\vec{t} = P'/|P'|$, on a $P' = |P'| \vec{t}$ et en dérivant par rapport au paramètre u , on trouve¹²

$$(19) \quad P'' = |P'|' \vec{t} + |P'| \underbrace{\vec{t}}_{=|P'|} D_{us} = |P'|' \vec{t} + |P'|^2 \kappa \vec{n}.$$

De là,

$$\kappa \vec{n} = \frac{|P'| P'' - |P'|' P'}{|P'|^3}.$$

De plus, en dérivant $|P'|^2 = \langle P', P' \rangle$, on trouve

$$|P'|' = \frac{\langle P', P'' \rangle}{|P'|}$$

et donc

$$\kappa \vec{n} = \frac{|P'|^2 P'' - \langle P', P'' \rangle P'}{|P'|^4} = \frac{(P' \wedge P'') \wedge P'}{|P'|^4}$$

où pour la dernière égalité, on a utilisé la formule du double produit vectoriel,

$$(P' \wedge P'') \wedge P' = P'' \langle P', P' \rangle - P' \langle P', P'' \rangle.$$

De plus, P' et $P'' \wedge P'$ étant des vecteurs orthogonaux,

$$|(P' \wedge P'') \wedge P'| = |P'' \wedge P'| |P'|.$$

Ceci permet de conclure. ■

Remarque VI.9.6. En plongeant \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 en remplaçant des couples de coordonnées par des triplets ayant une troisième composante nulle, la proposition ci-dessus peut également être utilisée pour calculer la courbure de courbes planes.

La proposition suivante est l'analogie de la proposition VI.9.5 et permet le calcul de la torsion et de la binormale dans le cas d'un paramétrage quelconque.

¹²On utilise ici le fait que \vec{t} s'exprime comme une fonction de fonction, $\vec{t} = \vec{t}(s(u))$, et on emploie aussi la première formule de Frenet.

Proposition VI.9.7. Soit Γ un a.r.c. de paramétrage (Ω, P) tel que la courbure ne s'annule jamais (de cette manière, la torsion est toujours définie). Si on désigne par $'$ la dérivée par rapport au paramètre u , alors la torsion est donnée par

$$\tau = \frac{\langle P' \wedge P'', P''' \rangle}{|P' \wedge P''|^2} = \frac{[P', P'', P''']}{|P' \wedge P''|^2}$$

et la binormale par

$$\vec{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}$$

Démonstration. Multiplions vectoriellement les deux membres de (19) par P' ,

$$P' \wedge P'' = |P'| \underbrace{P' \wedge \vec{t}}_0 + |P'|^2 \kappa \underbrace{P' \wedge \vec{n}}_{|P'| \vec{b}} = \kappa |P'|^3 \vec{b}$$

d'où l'expression de la binormale. À présent, en dérivant par rapport à u les deux membres de l'expression ci-dessus, on trouve

$$\underbrace{P'' \wedge P''}_0 + P' \wedge P''' = (\kappa |P'|^3)' \vec{b} + \kappa |P'|^3 \underbrace{\dot{\vec{b}}}_{-\tau \vec{n}} \underbrace{D_u s}_{|P'|}$$

Vu l'expression de la binormale, il est clair que $\langle \vec{b}, P'' \rangle = 0$. Dès lors, on obtient en multipliant scalairement les deux membres ci-dessus par P''

$$-[P', P'', P'''] = \langle P' \wedge P''', P'' \rangle = -\kappa \tau |P'|^4 \langle \vec{n}, P'' \rangle = -\kappa^2 \tau |P'|^6$$

où pour la dernière égalité, on a utilisé (19). De là,

$$\tau = \frac{[P', P'', P''']}{\kappa^2 |P'|^6}$$

et la conclusion suit en utilisant la proposition VI.9.5. ■

Proposition VI.9.8. Soit Γ une courbe telle que $\kappa \neq 0$. La courbe Γ est incluse dans un plan si et seulement si la torsion est nulle en tout point de Γ .

Démonstration. Nous pouvons une fois encore supposer disposer d'un paramétrage naturel (en effet, effectuer un changement de paramètres ne va changer ni la torsion, ni le fait que la courbe soit plane ou non).

Si la courbe est incluse dans le plan d'équation cartésienne

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d$$

où l'on peut supposer que le vecteur a de composantes (a_1, a_2, a_3) est unitaire, alors pour tout point $P(s)$ de Γ , on a $\langle \vec{OP}, a \rangle = d$ et en dérivant par rapport à s , on trouve

$$\langle \vec{t}, a \rangle = 0.$$

En dérivant à nouveau, $\langle \vec{t}, a \rangle = 0$ et donc puisque $\vec{t} = \kappa \vec{n}$, il vient

$$\langle \vec{n}, a \rangle = 0.$$

Puisque \vec{t} et \vec{n} sont orthogonaux à a , le vecteur \vec{b} lui est parallèle. De plus, \vec{b} et a étant unitaires, on a nécessairement $\vec{b} = a$ ou $\vec{b} = -a$ et puisque \vec{b} est une fonction continue, on a exactement l'une de ces deux situations. De là, \vec{b} est constant et $\vec{b} = 0$. La torsion est donc nulle.

Réciproquement, si la torsion est nulle en tout point, $\vec{b} = 0$ et donc \vec{b} est un vecteur constant de composantes (b_1, b_2, b_3) . Au vu de la première partie de cette preuve, vérifions que la courbe est incluse dans un plan d'équation

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d$$

où d est une constante. En dérivant $\langle \vec{OP}, \vec{b} \rangle$ par rapport à s , on trouve

$$D_s \langle \vec{OP}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle = 0.$$

Par conséquent, $\langle \vec{OP}, \vec{b} \rangle$ est une constante d ce qui signifie que la courbe est incluse dans un plan. ■

Exemple VI.9.9. Considérons l'hélice circulaire donnée dans l'exemple VI.2.2 par le paramétrage

$$P(u) = (R \cos u, R \sin u, \frac{a}{2\pi} u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de voir qu'il ne s'agit pas d'un paramétrage naturel (sauf pour des valeurs particulières des constantes R et a). On a

$$\begin{aligned} P' &= (-R \sin u, R \cos u, \frac{a}{2\pi}), \\ |P'|^2 &= R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}, \\ P'' &= (-R \cos u, -R \sin u, 0), \\ P' \wedge P'' &= \left(\frac{Ra}{2\pi} \sin u, -\frac{Ra}{2\pi} \cos u, R^2 \right), \\ |P' \wedge P''|^2 &= \frac{R^2 a^2}{4\pi^2} + R^4, \\ P''' &= (R \sin u, -R \cos u, 0). \end{aligned}$$

En utilisant les propositions VI.9.5 et VI.9.7, on trouve

$$\kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3} = \frac{R}{R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{[P', P'', P''']}{|P' \wedge P''|^2} = \frac{\frac{a}{2\pi}}{R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}}.$$

Le calcul de \vec{n} et de \vec{b} est laissé au lecteur. Des illustrations du trièdre de Frenet et du cercle osculateur en un point sont données aux figures VI.18 et VI.19.

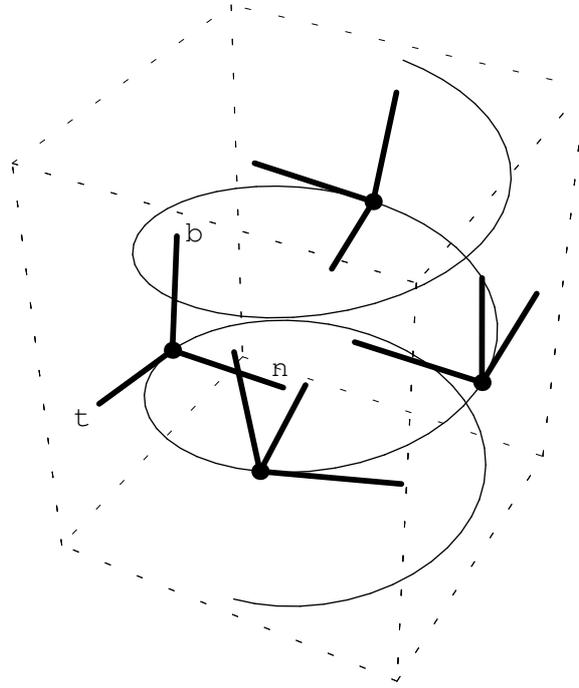
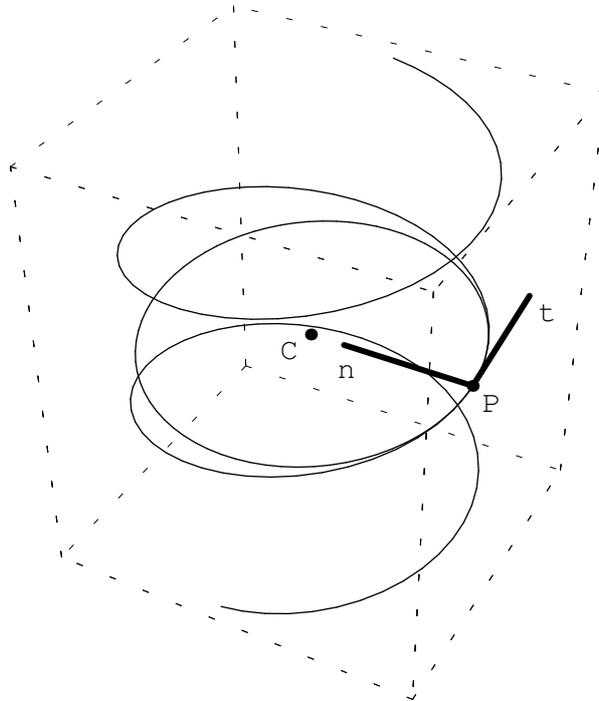


FIGURE VI.18. Le trièdre de Frenet le long de l'hélice circulaire.

FIGURE VI.19. Le cercle osculateur en un point P de l'hélice circulaire.

10. Courbure (cas des courbes planes)

Dans le cas des courbes planes, il est possible de raffiner quelque peu la définition de la courbure pour lui donner une interprétation géométrique supplémentaire. Nous supposons ici que le plan affín euclidien est orienté.

Définition VI.10.1. Soit Γ un a.r.c. de paramétrage naturel (Ω, P) . Si on désigne par $\vec{t} = \dot{P}$ le vecteur tangent à Γ en $P(s)$, alors on introduit le *vecteur unitaire normal signé* à Γ au point $P(s)$ comme étant le vecteur unitaire orthogonal à t tel que (\vec{t}, \vec{n}_s) soit une base orthonormée positive. Il existe donc un nombre réel κ_s tel que

$$\ddot{P} = \kappa_s \vec{n}_s.$$

Ce nombre est appelé la *courbure signée* de Γ (remarquons que ce nombre peut être positif, négatif ou nul). De plus, puisque $|\vec{n}_s| = 1$, on a

$$\kappa = |\ddot{P}| = |\kappa_s \vec{n}_s| = |\kappa_s|.$$

Remarque VI.10.2. Puisque la concavité est orientée selon la normale principale, si $\kappa_s > 0$ (resp. < 0), cela signifie que la concavité est orientée selon la normale signée (resp. dans le sens opposé à la normale signée).

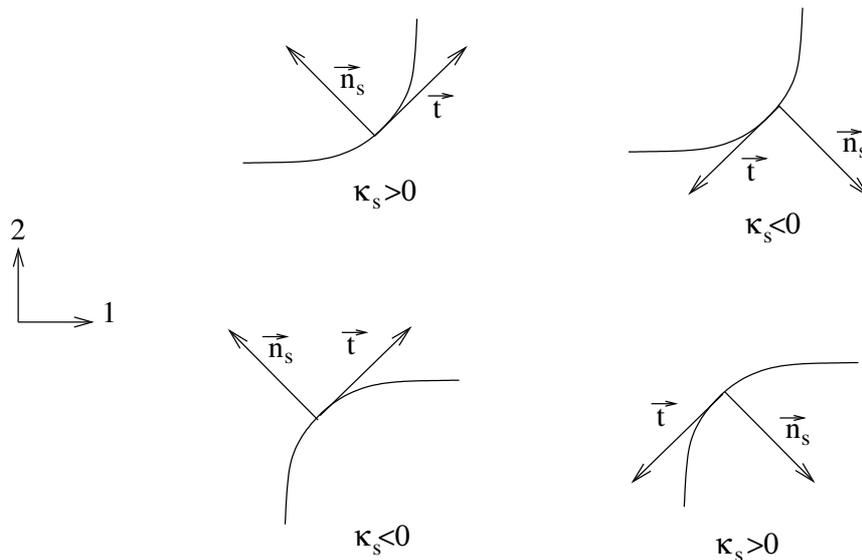


FIGURE VI.20. Interprétation géométrique de la courbure signée.

La proposition suivante montre que, pour un paramétrage naturel, la connaissance en chaque point de la courbure signée détermine essentiellement la courbe (i.e., à un déplacement euclidien près). Établissons un lemme préalable.

Lemme VI.10.3. Soient (Ω, P) un paramétrage naturel d'un a.r.c. Γ et $\psi(s)$ la mesure de l'angle orienté entre un vecteur unitaire fixé a et le vecteur

tangent \vec{t} à Γ au point $P(s)$. En supposant $\psi(s)$ dérivable, on a

$$\kappa_s = D_s \psi.$$

Démonstration. Soit b un vecteur unitaire tel que (a, b) soit une base orthonormée positive. La figure VI.21 reprend les différents concepts introduits. De là, $\vec{t} = a \cos \psi + b \sin \psi$ et en dérivant par rapport à l'abscisse

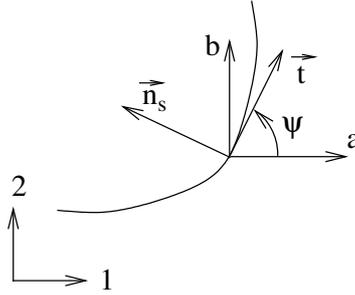


FIGURE VI.21. Signification de κ_s .

curviligne s ,

$$\dot{\vec{t}} = (-a \sin \psi + b \cos \psi) D_s \psi.$$

D'où,

$$\langle \dot{\vec{t}}, a \rangle = -\sin \psi D_s \psi$$

et puisque $\dot{\vec{t}} = \kappa_s \vec{n}_s$, on a

$$\kappa_s \langle \vec{n}_s, a \rangle = -\sin \psi D_s \psi.$$

Or, il est clair que

$$\langle \vec{n}_s, a \rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\sin \psi.$$

■

Remarque VI.10.4. En d'autres termes, le lemme précédent montre que κ_s traduit la vitesse de rotation du vecteur tangent le long de la courbe.

Rappelons qu'un *déplacement euclidien* est la composée $\mathcal{T}_c \circ \mathcal{R}_\theta$ d'une rotation d'amplitude θ centrée à l'origine et d'une translation d'un vecteur constant c .

Proposition VI.10.5. Soit $k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Il existe un a.r.c. de paramétrage naturel (Ω, P) dont la courbure signée est exactement k .

De plus, si un autre a.r.c. de paramétrage naturel (Ω, Q) possède également k comme courbure signée, alors il existe un déplacement euclidien \mathcal{M} tel que

$$Q(s) = \mathcal{M}(P(s)), \quad \forall s \in \Omega.$$

Pour rappel, dans cette section, on considère des courbes planes uniquement.

Démonstration. Fixons s_0 dans Ω et posons, pour tout $s \in \Omega$,

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s k(u) du.$$

Définissons pour tout $s \in \Omega$,

$$P(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right).$$

Il s'agit bien évidemment d'un paramétrage naturel puisque

$$\dot{P} = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

est un vecteur unitaire. L'angle entre ce vecteur tangent et le vecteur e_1 étant $\varphi(s)$, le lemme précédent nous montre que

$$\kappa_s = D_s \varphi = D_s \int_{s_0}^s k(u) du = k(s).$$

Passons à la seconde partie de la proposition. Soit $\psi(s)$, la mesure de l'angle orienté entre e_1 et le vecteur tangent unitaire \dot{Q} . Cela signifie que

$$\dot{Q}(s) = (\cos \psi(s), \sin \psi(s))$$

et donc

$$Q(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \psi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \psi(t) dt \right) + Q(s_0).$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$Q(s) = \mathcal{T}_c \left(\int_{s_0}^s \cos \psi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \psi(t) dt \right)$$

où c est le vecteur $\overrightarrow{OQ(s_0)}$. Par le lemme précédent, $D_s \psi = k(s)$ et dès lors,

$$\psi(s) = \int_{s_0}^s k(u) du + \psi(s_0) = \varphi(s) + \psi(s_0).$$

En posant, $\theta = \psi(s_0)$, on obtient

$$Q(s) = \mathcal{T}_c \left(\int_{s_0}^s \underbrace{\cos(\varphi(t) + \theta)}_{\cos \varphi(t) \cos \theta - \sin \varphi(t) \sin \theta} dt, \int_{s_0}^s \underbrace{\sin(\varphi(t) + \theta)}_{\sin \varphi(t) \cos \theta + \cos \varphi(t) \sin \theta} dt \right)$$

ce que l'on réécrit

$$Q(s) = \mathcal{T}_c \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt \\ \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \end{pmatrix} = \mathcal{T}_c \mathcal{R}_\theta (P(s)).$$

■

Exemple VI.10.6. La proposition ci-dessus montre que pour une fonction k donnée, nous pouvons trouver une courbe ayant k pour courbure signée. Cependant, des courbures simples peuvent mener à des courbes compliquées. Ainsi, considérons la courbure signée $\kappa_s(s) = s$. En utilisant les mêmes

notations que dans la preuve de la proposition précédente et en prenant $s_0 = 0$, il vient

$$\varphi(s) = \int_0^s u \, du = \frac{s^2}{2},$$

$$P(s) = \left(\int_0^s \cos \frac{t^2}{2} \, dt, \int_0^s \sin \frac{t^2}{2} \, dt \right).$$

Ces intégrales ne peuvent être évaluées en termes de fonctions élémentaires (elles apparaissent par exemple en théorie de la diffraction de la lumière où elles portent le nom d'*intégrales de Fresnel*). La figure VI.22 donne une représentation de cette courbe, appelée *spirale de Cornu*, où les intégrales ont été évaluées numériquement.

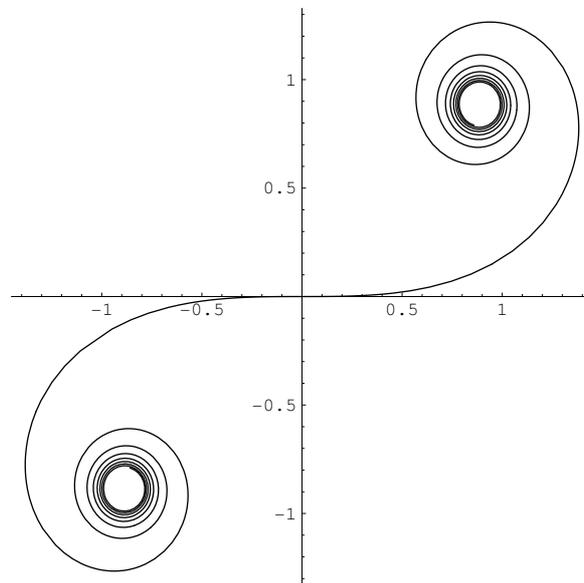


FIGURE VI.22. La spirale de Cornu.

Remarque VI.10.7. La première partie de la proposition VI.10.5 reste vraie si l'on remplace “courbure signée” par “courbure”. Par contre, la seconde partie n’est pas vraie. Il suffit de considérer les courbes de paramétrage respectif (x, x^3) et $(x, |x|^3)$ représentées à la figure VI.23.

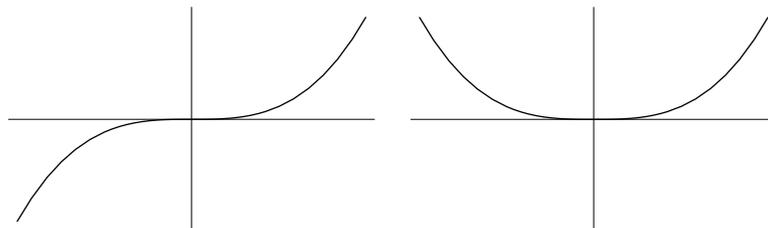


FIGURE VI.23. Deux courbes ayant même courbure.

Enfin, signalons qu'il existe un analogue à la proposition VI.10.5 pour les courbes de l'espace. Si $P(s)$ et $Q(s)$ sont des paramétrages naturels de deux a.r.c. de \mathbb{R}^3 avec même courbure $\kappa(s) > 0$ et même torsion $\tau(s)$ pour tout s , alors il existe un déplacement euclidien \mathcal{M} tel que $Q(s) = \mathcal{M}(P(s))$ pour tout s . De plus, si k et t sont des fonctions continûment dérivables sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ telles que $k > 0$ en tout point de Ω , alors il existe un paramétrage naturel d'un a.r.c. dont la courbure est k et la torsion est t .

11. Coniques

Dans cette section, on se place dans le plan affiné euclidien muni d'un repère orthonormé. Nous allons étudier les courbes obtenues comme intersection d'un cône circulaire droit avec un plan. Une telle courbe est appelée *section conique* ou simplement *conique* et son équation la plus générale est de la forme¹³

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + fx + gy + c = 0, \quad a, b, c, f, g, h \in \mathbb{R}.$$

Commençons par quelques cas particuliers bien connus.

11.1. L'ellipse. Une courbe ayant pour équation cartésienne

$$(20) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une *ellipse* et est représentée à la figure VI.24. Un paramétrage de

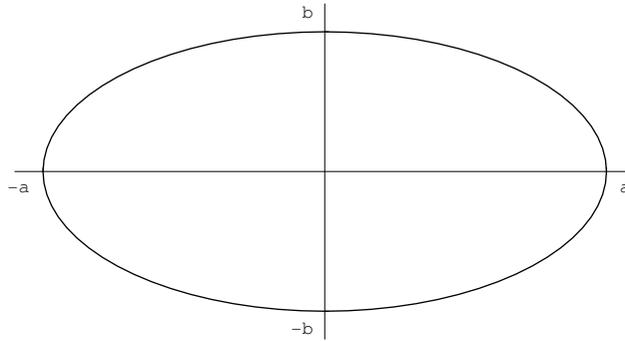


FIGURE VI.24. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

l'ellipse est donné par

$$P(u) = (a \cos u, b \sin u), \quad u \in]0, 2\pi[$$

¹³On écrit cette équation aussi sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

d'où la présence des coefficients multiplicatifs 2.

et en posant $t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, on obtient le paramétrage

$$P(t) = \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

11.2. La parabole. Une courbe ayant pour équation cartésienne

$$(21) \quad y^2 = 4ax$$

est une *parabole* et est représentée à la figure VI.25. Un paramétrage est

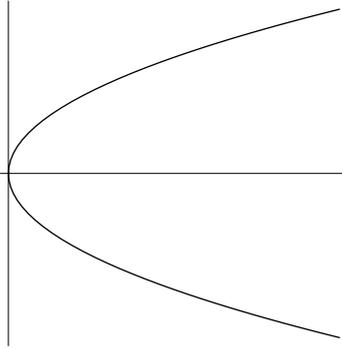


FIGURE VI.25. La parabole $y^2 = 4ax$.

donné par

$$P(u) = (au^2, 2au), \quad u \in \mathbb{R}.$$

11.3. L'hyperbole. Une courbe ayant pour équation cartésienne

$$(22) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est une *hyperbole* représentée à la figure VI.26 formée de deux branches séparées par les droites d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, i.e., les droites d'équation respective

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}.$$

Ces droites sont les *asymptotes* de l'hyperbole. En particulier, si $a = b$, alors les asymptotes sont orthogonales et on dit que l'hyperbole est *rectangulaire* ou *équilatère*. Dans ce cas, un moyen commode pour représenter l'hyperbole est d'utiliser une équation de la forme $xy = c^2$. Sous cette forme, les asymptotes sont les axes du repère. Un paramétrage d'une branche d'hyperbole est donné par

$$P(u) = (a \operatorname{ch} u, b \operatorname{sh} u), \quad u \in \mathbb{R}$$

car $\operatorname{ch} u > 0$ pour tout u . Un paramétrage de l'hyperbole dans son entièreté est donné par

$$P(u) = (a \sec u, b \operatorname{tg} u), \quad u \in]-\pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/2[.$$

Si on tient compte de la factorisation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

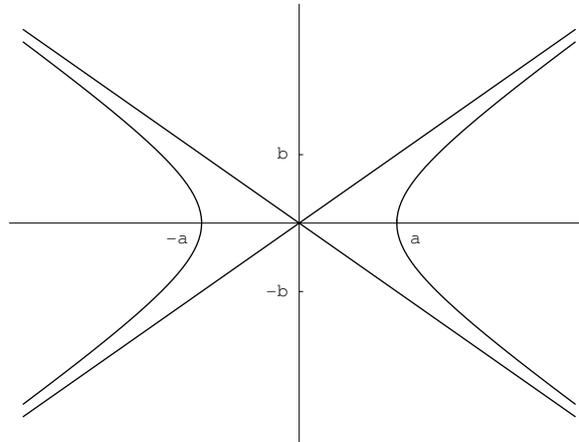


FIGURE VI.26. L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

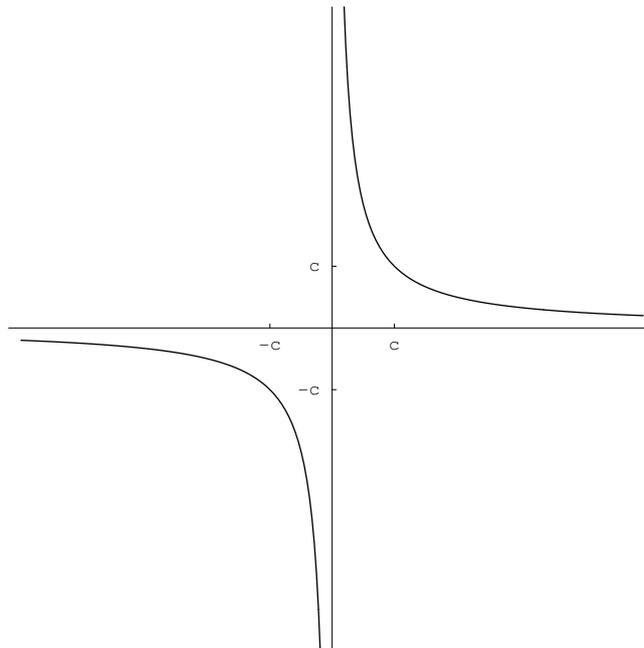


FIGURE VI.27. L'hyperbole équilatère $xy = c^2$.

et en posant $t = x/a + y/b$, on obtient le paramétrage

$$P(t) = \left(\frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right)$$

pour $t > 0$ (resp. $t < 0$), on décrit la branche de droite (resp. de gauche).

11.4. Equation générale, réduction. Nous allons montrer que l'équation générale du second degré

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + fx + gy + c = 0, \quad a, b, c, f, g, h \in \mathbb{R}.$$

peut se ramener, par changement de repère, à l'une des équations standards présentées ci-dessus ou à l'ensemble vide ou enfin à une conique dégénérée. Un changement de repère revient à un déplacement euclidien, i.e., la composée d'une rotation centrée à l'origine et d'une translation. Les rotations

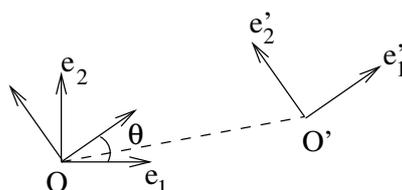


FIGURE VI.28. Changement de repère.

et translations étant des isométries, ces transformations ne changent ni la forme, ni le type des coniques envisagées. De plus, nous nous autorisons à effectuer, si nécessaire, un changement d'échelle

$$x \rightarrow x' = rx, \quad y \rightarrow y' = ry$$

pour se débarrasser d'éventuelles constantes multiplicatives. Lorsque l'équation ne contient pas de termes en xy , une translation suffit pour "compléter les carrés". Considérons deux exemples.

Exemple VI.11.1. Soit l'équation $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ dans le repère orthonormé $(O, (e_1, e_2))$. Elle peut se réécrire

$$\frac{(x - 2)^2}{2} + (y + 1)^2 = 1.$$

En effectuant une translation d'un vecteur de composantes $(2, -1)$, on obtient un nouveau repère $(O', (e_1, e_2))$ dans lequel l'équation devient

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1.$$

Il s'agit donc d'une ellipse de demi grand axe $\sqrt{2}$, de demi petit axe 1 et

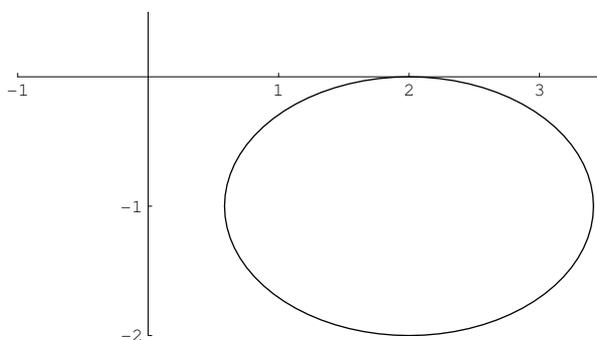


FIGURE VI.29. Une ellipse centrée en $(2, -1)$.

centrée en O' de coordonnées $(2, -1)$ (dans le repère initial). Remarquons

encore que si dans l'équation de départ, 4 avait été remplacé par 6, l'ellipse aurait été réduite à un point et si on remplace 4 par $c > 6$, alors aucun point ne vérifie l'équation.

Exemple VI.11.2. Soit la courbe d'équation $2x^2 - 2y^2 + 4x + 12y = 19$ dans le repère orthonormé $(O, (e_1, e_2))$. Elle peut se réécrire

$$2(x+1)^2 - 2(y-3)^2 = 3 \text{ ou encore } \frac{(x+1)^2}{\frac{3}{2}} - \frac{(y-3)^2}{\frac{3}{2}} = 1.$$

En effectuant une translation d'un vecteur de composantes $(-1, 3)$, on ob-

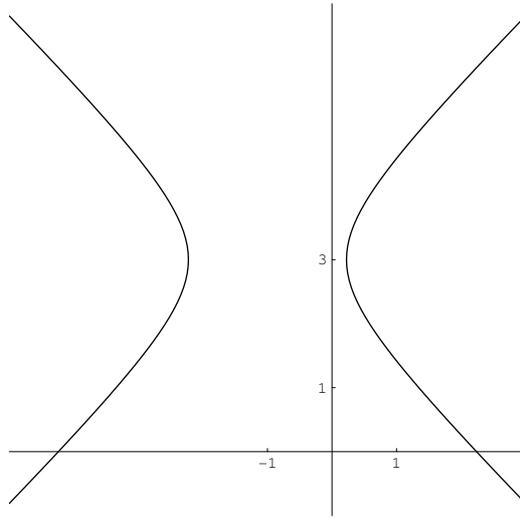


FIGURE VI.30. Une hyperbole centrée en $(-1, 3)$.

tient un nouveau repère dans lequel l'équation devient

$$\frac{x^2}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1.$$

Remarquons que dans l'équation de départ, si on avait remplacé le terme indépendant 19 par 16, on aurait obtenu l'équation de deux droites sécantes.

Envisageons à présent la situation où l'équation de départ contient un terme en xy . Une rotation convenable permet d'éliminer ce terme. En effet, pour une rotation d'amplitude θ centrée en O et où θ est l'angle orienté entre e_1 et e'_1 , si on désigne respectivement par (x, y) et (x', y') les coordonnées d'un point dans les repères $(O, (e_1, e_2))$ et $(O, (e'_1, e'_2))$, alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{cases} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases}$$

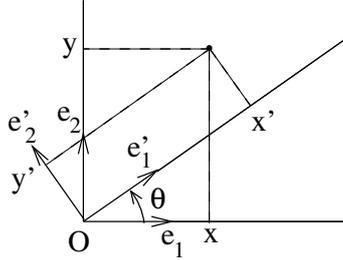


FIGURE VI.31. Rotation centrée à l'origine.

Ainsi l'équation $ax^2 + 2hxy + by^2 + fx + gy + c = 0$ devient dans le nouveau repère¹⁴

$$\begin{aligned} & a(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + 2h(x \cos \theta - y \sin \theta)(x \sin \theta + y \cos \theta) \\ & + b(x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + f(x \cos \theta - y \sin \theta) \\ & + g(x \sin \theta + y \cos \theta) + c = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient du terme en xy est donc

$$-2a \cos \theta \sin \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + 2h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (b - a) \sin 2\theta + 2h \cos 2\theta.$$

Il suffit alors de choisir θ pour l'annuler. Nous l'illustrons sur un exemple.

Exemple VI.11.3. Considérons l'équation $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 3 = 0$ dans le repère $(O, (e_1, e_2))$.

Une rotation d'angle θ a pour effet de modifier le coefficient du terme en xy en

$$-8 \sin 2\theta - 6 \cos 2\theta.$$

Dès lors, il suffit de choisir θ tel que $\operatorname{tg} 2\theta = -3/4$. Il vient

$$\frac{2\operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2 \theta - 8\operatorname{tg} \theta - 3 = 0.$$

On peut donc prendre $\operatorname{tg} \theta = 3$ ou $-1/3$. Choisissons la première possibilité et prenons θ dans le premier quadrant ($\theta \simeq 71^\circ$). Puisque $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$, on trouve $\cos \theta = 1/\sqrt{10}$ et $\sin \theta = 3/\sqrt{10}$. De là, en effectuant la rotation, on trouve comme équation

$$\begin{aligned} & \left(x \frac{1}{\sqrt{10}} - y \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 6\left(x \frac{1}{\sqrt{10}} - y \frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(x \frac{3}{\sqrt{10}} + y \frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 7\left(x \frac{3}{\sqrt{10}} + y \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \\ & + 10\left(x \frac{1}{\sqrt{10}} - y \frac{3}{\sqrt{10}}\right) + 2\left(x \frac{3}{\sqrt{10}} + y \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 3 = 0. \end{aligned}$$

En changeant l'échelle ($x \rightarrow x' = x/\sqrt{10}$ et $y \rightarrow y' = y/\sqrt{10}$) et en développant les carrés, on obtient

$$80x'^2 - 20y'^2 - 16x' + 28y' - 3 = 0$$

¹⁴Pour ne pas alourdir l'écriture, on notera encore x et y les coordonnées dans le nouveau repère.

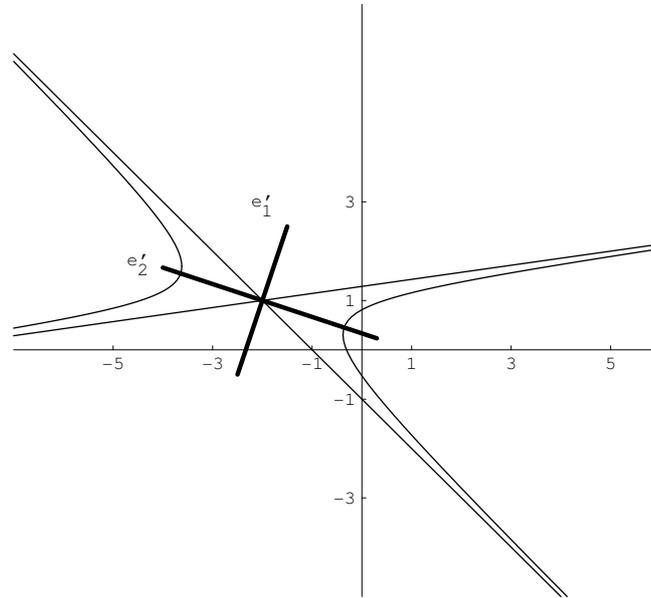


FIGURE VI.32. Une hyperbole d'équation $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 3 = 0$.

ou encore

$$\frac{(x - 1/10)^2}{\frac{1}{80}} - \frac{(y - 7/10)^2}{\frac{1}{20}} + 6 = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{(y - 7/10)^2}{\frac{3}{10}} - \frac{(x - 1/10)^2}{\frac{3}{40}} = 1.$$

Pour conclure, on doit donc réaliser une translation d'un vecteur de composantes $(1/10, 7/10)$ dans le nouveau repère. La nouvelle origine a pour coordonnées dans le repère initial¹⁵,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 1/10 \\ 7/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 \\ 7/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque VI.11.4. Comme nous le verrons au chapitre suivant dans le cadre des surfaces quadriques (cf. théorème VII.7.1), on aurait pu ici utiliser la notion de vecteur propre, vue en algèbre, pour éviter ces calculs fastidieux de nature trigonométrique et déterminer un nouveau repère $(O, (e'_1, e'_2))$ dans lequel les termes en xy n'apparaissent pas. C'est un bon exercice que d'adapter la preuve du théorème VII.7.1 au cas des coniques. Illustrons notre propos sur l'exemple donné précédemment. La matrice réelle symétrique correspondante est ici

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

¹⁵Pour ce faire, on effectue d'abord le changement d'échelle inverse suivi d'une rotation pour se ramener au repère initial.

et possède

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres normés. Avec ceux-ci, on peut reconstruire bien plus rapidement la matrice de rotation désirée.

12. Propriétés focales des coniques

Dans la section précédente, nous avons étudié les coniques d'un point de vue purement algébrique. Nous en donnons à présent une autre définition plus géométrique (en termes de lieu).

Définition VI.12.1. Soient \mathcal{D} une droite fixe appelée *directrice* et F un point fixe appelé *foyer*. Une *conique* est le lieu des points P tels que

$$d(P, F) = \epsilon d(P, \mathcal{D}).$$

La constante $\epsilon > 0$ est appelée l'*excentricité*. On s'autorisera également le cas $\epsilon = 0$ en posant $d(P, F)$ constant et dans ce cas, la conique est un cercle.

Cela revient à repousser la directrice \mathcal{D} à l'infini...

Soit un repère orthonormé décrété positif d'origine F pour lequel la directrice \mathcal{D} est parallèle à l'axe des ordonnées et tel que \mathcal{D} a pour équation $x = t$ avec $t > 0$. On note K , la projection orthogonale de P sur \mathcal{D} , L un point de la conique d'abscisse nulle et H sa projection orthogonale sur \mathcal{D} .

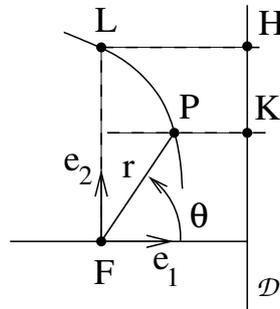


FIGURE VI.33. Equation polaire d'une conique.

Remarque VI.12.2. Remarquons qu'un tel point L existe toujours et par raison de symétrie, il y a toujours deux points de ce type (l'un d'ordonnée positive et l'autre d'ordonnée négative).

Si r désigne la distance de F à P , ℓ celle de F à L et θ l'angle orienté entre \vec{e}_1 et \vec{FP} , alors dans les six cas représentés, on a

- (1) $d(P, K) = d(L, H) - r \cos \theta$
- (2) $d(P, K) = d(L, H) + r \sin(\theta - \pi/2) = d(L, H) - r \cos \theta$
- (3) $d(P, K) = r \cos \theta - d(L, H)$
- (4) $d(P, K) = d(L, H) + r \cos(\theta - \pi) = d(L, H) - r \cos \theta$
- (5) $d(P, K) = d(L, H) - r \cos(2\pi - \theta) = d(L, H) - r \cos \theta$
- (6) $d(P, K) = r \cos \theta - d(L, H)$.

Remarquez le changement d'expression lorsque P se trouve "de l'autre côté" de \mathcal{D} par rapport à F .

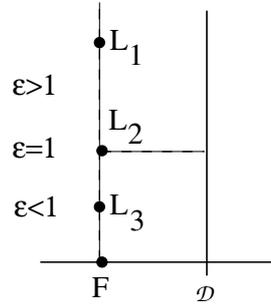


FIGURE VI.34. Point d'abscisse 0 appartenant à la conique (pour $\epsilon <, =, > 1$).

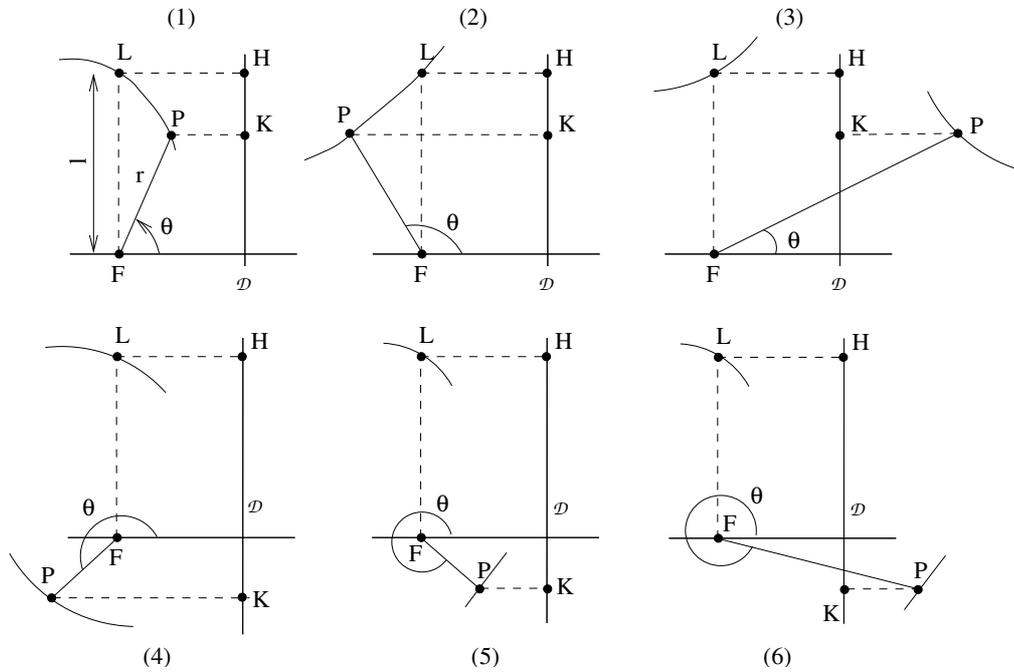


FIGURE VI.35. Détermination de $d(P, K)$.

Attention au module !

Ainsi, $d(P, K) = |d(L, H) - r \cos \theta|$ et

$$(23) \quad r = \epsilon d(P, K) = \epsilon |d(L, H) - r \cos \theta| = |\ell - \epsilon r \cos \theta|$$

car puisque L appartient à la conique, $\ell = d(L, F) = \epsilon d(L, \mathcal{D}) = \epsilon d(L, H)$.

En élevant au carré (23), puisque $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on trouve

$$x^2 + y^2 = (\ell - \epsilon x)^2$$

ou encore

$$(1 - \epsilon^2)x^2 + 2\epsilon\ell x + y^2 = \ell^2.$$

12.1. Excentricité $0 \leq \epsilon < 1$. Dans ce cas, on peut compléter le carré ci-dessus et on trouve

$$(1 - \epsilon^2) \left(x + \frac{\epsilon \ell}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + y^2 = \frac{\ell^2}{1 - \epsilon^2}$$

qui est l'équation d'une ellipse de centre $(-\frac{\epsilon \ell}{1 - \epsilon^2}, 0)$ et de demi grands axes $\frac{\ell}{1 - \epsilon^2}$ et $\frac{\ell}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$. Pour des raisons de symétrie, il est clair qu'une ellipse a deux foyers et deux directrices (le second foyer et la seconde directrice définissant exactement le même ensemble de points).

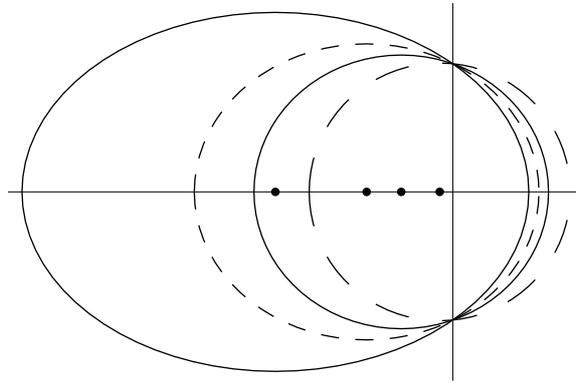


FIGURE VI.36. Ellipses et leur centre respectif pour des excentricités 0, 7; 0, 5; 0, 35 et 0, 1 (ℓ constant, origine du repère au foyer).

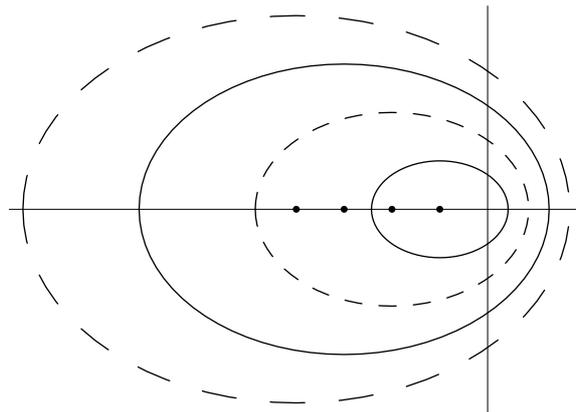


FIGURE VI.37. Ellipses et leur centre respectif pour des valeurs de $\ell = 2; 1, 5; 1$ et $0, 5$ (ϵ constant).

Réciproquement, si dans un repère orthonormé d'origine O , l'équation d'une ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Ici, le repère n'est plus centré au foyer !

puisque $a = \frac{\ell}{1-\epsilon^2}$ et $b = \frac{\ell}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$, alors l'excentricité est donnée par

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Puisque¹⁶ le carré de la distance du centre O de l'ellipse au foyer F vaut

$$(24) \quad \frac{\epsilon^2 \ell^2}{(1 - \epsilon^2)^2} = a^2 - b^2,$$

on trouve les coordonnées $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ pour les foyers. Puisque le point P de coordonnées $(a, 0)$ appartient à l'ellipse, si la directrice a pour équation $x = t$, alors

$$\underbrace{a - \sqrt{a^2 - b^2}}_{d(P,F)} = \underbrace{\epsilon(t - a)}_{d(P,D)} \quad \text{d'où} \quad t = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Par symétrie, on a une deuxième directrice d'équation $x = -t$. Enfin, de (24), on tire $\ell = b^2/a$.

Remarque VI.12.3. Soient F et F' les foyers de l'ellipse. Procédons comme précédemment en considérant un repère orthonormé positif $(F, (e_1, e_2))$ tel que \mathcal{D} aie encore une équation de la forme $x = t$ avec $t > 0$ et F' aie une abscisse négative. Posons Q comme la projection orthogonale de P sur la droite FF' , $x = \langle \vec{FQ}, e_1 \rangle$ et $x' = \langle \vec{F'Q}, e_1 \rangle$. Il est clair que $x' - x = \langle \vec{F'Q} - \vec{FQ}, e_1 \rangle = d(F, F')$. On note toujours $r = d(F, P)$ et

$|x| = d(F, Q)$ et
 $|x'| = d(F', Q)$

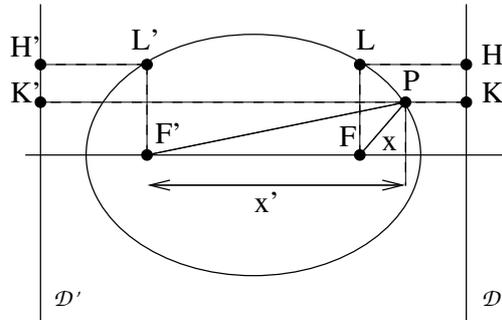


FIGURE VI.38. Une ellipse et ses deux foyers.

$r' = d(F', P)$. Etant exactement dans la situation décrite page 150, on trouve tout d'abord

$$r = \ell - \epsilon x$$

(il n'y a pas ici de module à ajouter car le point P et le foyer F se situent dans le même demi-plan déterminé par la directrice \mathcal{D} , cela revient à dire qu'on se trouve dans une des situations (1), (2), (4) ou (5) de la figure VI.35.)

¹⁶En effet, on a vu précédemment que pour un repère dont l'origine est un foyer, le centre de l'ellipse a pour coordonnées $(-\frac{\epsilon\ell}{1-\epsilon^2}, 0)$.

Ensuite, on a aussi

$$r' = \ell + \epsilon x'.$$

L'explication de la présence du signe "+" est la suivante. Avec nos conventions et en se plaçant dans un repère $(F', (e'_1, e'_2))$ associé cette fois à F' et \mathcal{D}' , on obtiendrait le même type d'équation que précédemment. Cependant, nous avons fixé ici un repère $(F, (e_1, e_2))$. Si on note θ (resp. θ') la mesure de l'angle entre e_1 et $\overrightarrow{F'P}$ (resp. entre e'_1 et $\overrightarrow{F'P}$), alors il est clair que $\cos(\theta') = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ car $e'_1 = -e_1$. Ceci explique donc le changement de signe annoncé.

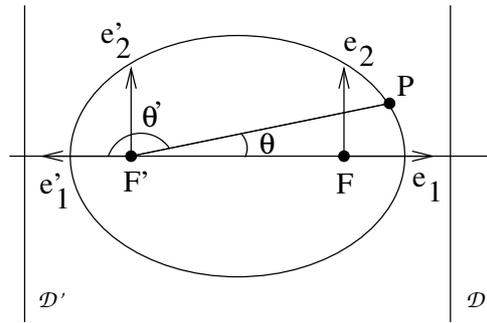


FIGURE VI.39. Pourquoi $r' = \ell + \epsilon x'$.

Par conséquent,

$$r + r' = 2\ell + \epsilon d(F, F')$$

est constant. L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est constante.

Remarque VI.12.4. Utilisons le paramétrage $P(u) = (a \cos u, b \sin u)$ de l'ellipse. Les composantes des vecteurs \overrightarrow{FP} , $\overrightarrow{F'P}$ sont respectivement

$$(a \cos u - \sqrt{a^2 - b^2}, b \sin u) \text{ et } (a \cos u + \sqrt{a^2 - b^2}, b \sin u).$$

Un vecteur tangent à l'ellipse en P a pour composantes

$$(-a \sin u, b \cos u).$$

Ainsi, la mesure de l'angle entre la tangente à l'ellipse en P et la droite FP vaut

$$\cos \theta = \frac{|(b^2 - a^2) \sin u \cos u + a \sqrt{a^2 - b^2} \sin u|}{\sqrt{(a \cos u - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2 \sin^2 u} \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}.$$

Formule de l'angle entre deux droites.

De même, la mesure de l'angle entre la tangente à l'ellipse en P et la droite $F'P$ vaut

$$\cos \theta' = \frac{|(b^2 - a^2) \sin u \cos u - a \sqrt{a^2 - b^2} \sin u|}{\sqrt{(a \cos u + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2 \sin^2 u} \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}.$$

En élevant au carré, on vérifie facilement que $\theta = \theta'$ (les deux angles appartenant au premier quadrant). Ainsi, si un miroir a des parois elliptiques, un rayon lumineux passant par un foyer se réfléchira sur la paroi pour passer par l'autre foyer. Ce phénomène a également été utilisé en architecture pour la construction de certaines pièces aux formes elliptiques dotées de propriétés acoustiques particulières. En effet, dans une telle pièce, deux personnes se trouvant aux deux foyers peuvent discuter comme si elles se trouvaient côte à côte. On trouve par exemple une telle réalisation au Capitole (“whispering room”).

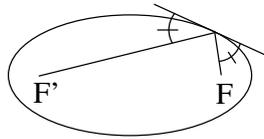


FIGURE VI.40. Ellipse, tangente et foyers...

12.2. Excentricité $\epsilon = 1$. Ici, l'équation se réduit à $y^2 = \ell^2 - 2\ell x$ qui est clairement une parabole ayant l'axe des abscisses comme axe de symétrie. Le sommet a pour coordonnées $(\ell/2, 0)$. L'origine du repère se trouvant au foyer, on en déduit que la directrice a pour équation $x = \ell$.

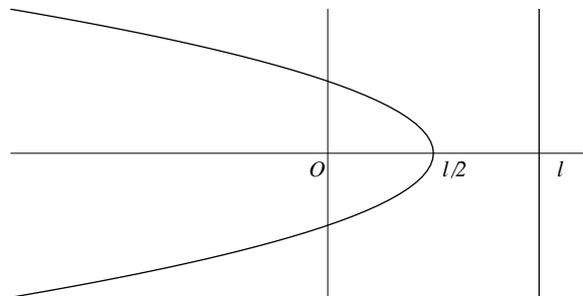


FIGURE VI.41. Une parabole.

Remarque VI.12.5. En tirant parti du paramétrage $P(u) = (au^2, 2au)$ donné précédemment (et où l'origine du repère coïncidait avec le sommet de la parabole, si on procède comme à la remarque VI.12.4, alors on peut montrer que la mesure de l'angle entre la tangente et la droite PF est égale à la mesure de l'angle entre la tangente et une parallèle à l'axe. Cette propriété est par exemple utilisée dans le cas des miroirs paraboliques pour concentrer des rayons lumineux provenant d'une source lointaine comme le soleil en un point (en effet, dans ce cas, on peut supposer les rayons parallèles).

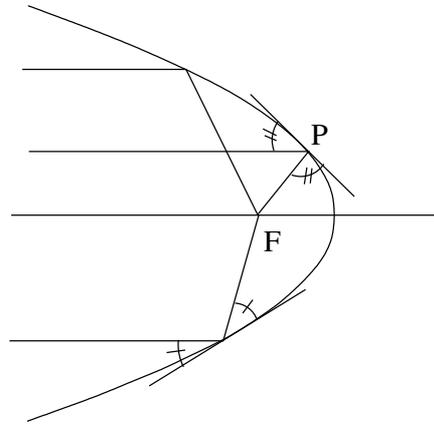


FIGURE VI.42. Propriété focale de la parabole.

12.3. Excentricité $\epsilon > 1$. Nous pouvons, comme dans le cas de la parabole, compléter le carré pour obtenir l'équation

$$(\epsilon^2 - 1) \left(x + \frac{\epsilon \ell}{1 - \epsilon^2} \right)^2 - y^2 = \frac{\ell^2}{\epsilon^2 - 1}.$$

Avec des calculs semblables à ceux effectués dans le cas de l'ellipse, si dans un repère orthonormé, une hyperbole a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, alors $\epsilon = \sqrt{1 + b^2/a^2}$, les foyers ont pour coordonnées $(\pm \sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, les directrices ont pour équation $x = \pm a^2/\sqrt{a^2 + b^2}$ et $\ell = b^2/a$. On peut également montrer que, si F et F' sont les foyers et si P est un point quelconque de l'hyperbole, alors la mesure de l'angle entre la tangente en P et la droite PF est égale à la mesure de l'angle entre la tangente en P et la droite PF' .

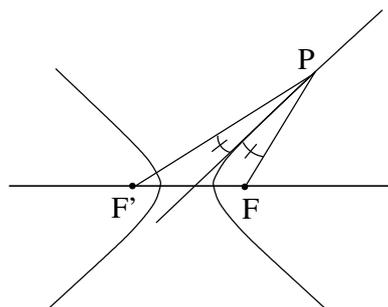


FIGURE VI.43. Hyperbole, tangente, foyers...

Remarque VI.12.6. On peut faire le même genre de développements qu'à la remarque VI.12.3. Ici, il faut être quelque peu plus prudent dans les cas à traiter et on trouve, avec les mêmes notations,

$$|r' - r| = \epsilon d(F, F') + 2\ell.$$

Ainsi, l'hyperbole est le lieu des points dont la différence en module des distances à deux points fixes est constante.

CHAPITRE VII

Une introduction aux surfaces

1. Définition

Définition VII.1.1. Un *paramétrage* (Ω, P) de classe C_k est la donnée d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et d'une fonction $P(u, v)$ de classe C_k à valeurs dans l'espace affine euclidien à trois dimensions. On impose à la fonction P d'être injective¹ et aux vecteurs $D_u P$ et $D_v P$ d'être linéairement indépendants pour tout $(u, v) \in \Omega$. Cette dernière condition se traduit aussi par $D_u P \wedge D_v P \neq 0$ pour tout $(u, v) \in \Omega$. On appelle *portion régulière de surface* l'ensemble des valeurs prises par une telle fonction, i.e., $\{P(u, v) \mid (u, v) \in \Omega\}$. On dira que deux paramétrages (Ω, P) et (Ω', P') sont *équivalents* s'il existe un changement de variables régulier d'ordre k entre Ω et Ω' tel que

$$P'(u', v') = P(u(u', v'), v(u', v')).$$

Exemple VII.1.2. Soit $\Omega =]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ et la fonction P définie par

$$\begin{cases} P_1(u, v) &= \sin u \cos v \\ P_2(u, v) &= \sin u \sin v \\ P_3(u, v) &= \cos u \end{cases} .$$

On a

$$D_u P = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u), \quad D_v P = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

et

$$D_u P \wedge D_v P = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u).$$

Il est facile de vérifier que $D_u P \wedge D_v P \neq 0$ pour tout $(u, v) \in \Omega$.

Exemple VII.1.3. Soit $\Omega =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ et la fonction

$$P(u, v) = (u, v, \sin u \sin v).$$

Un paramétrage de ce type est appelé *paramétrage par des coordonnées*. La portion régulière de surface correspondante est représentée à la figure VII.2.

Définition VII.1.4. On appelle *surface* une union de portions régulières de surface telle que l'intersection de deux quelconques d'entre elles soit une sous-portion régulière de surface de chacune d'entre elles qu'on peut alors rapporter indifféremment aux paramètres de l'une ou de l'autre.

¹Par analogie au cas des courbes où on avait supposé qu'un a.r.c. ne possédait pas de points multiples, cela revient ici à supposer la fonction injective.

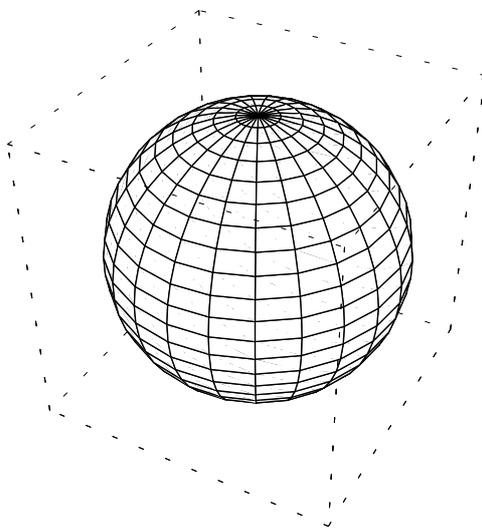


FIGURE VII.1. Une portion régulière de surface.

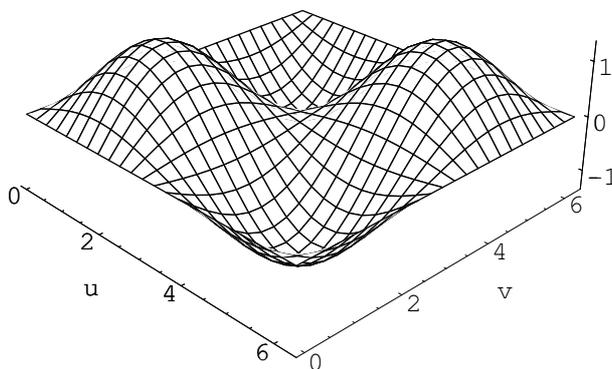


FIGURE VII.2. Un paramétrage par des coordonnées.

Remarque VII.1.5. Dans le cas d'un paramétrage par des coordonnées $P(u, v) = (u, v, f(u, v))$, la relation $z = f(x, y)$ est une *équation cartésienne* de la portion régulière de surface.

Dans le cas d'un paramétrage quelconque

$$P(u, v) = (P_1(u, v), P_2(u, v), P_3(u, v)),$$

si on élimine les paramètres u et v , on obtient une relation $F(x, y, z) = 0$ à laquelle satisfont les points de la portion régulière de surface. Il faut cependant remarquer que l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont une relation $F(x, y, z) = 0$ n'est en général pas une portion régulière de surface mais une surface².

²Voir par exemple en analyse, le théorème des fonctions implicites.

2. Tangente, normale

Soit (Ω, P) un paramétrage d'une portion régulière de surface Σ . Si $u(t)$ et $v(t)$ sont deux fonctions de classe C_1 dans un ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ telles que

$$(u(t), v(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in]a, b[,$$

alors $P(u(t), v(t))$ est un arc régulier de courbe situé sur Σ (à condition que $D_t u$ et $D_t v$ ne s'annulent pas simultanément, ce que nous supposons dans la suite). La direction de la tangente à cet a.r.c. au point $P(u(t), v(t))$

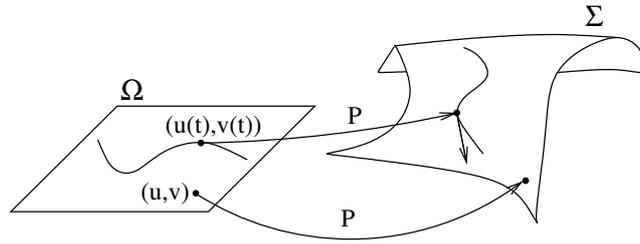


FIGURE VII.3. Courbe située sur Σ .

s'obtient en dérivant $P(u(t), v(t))$ par rapport à t ,

$$[D_t u]_t [D_u P]_{(u(t), v(t))} + [D_t v]_t [D_v P]_{(u(t), v(t))}.$$

Ce vecteur est toujours non nul car, vu nos hypothèses, $D_u P$ et $D_v P$ sont linéairement indépendants et $D_t u$ et $D_t v$ ne s'annulent pas simultanément.

Ainsi, si (u_0, v_0) appartient à Ω et si $P(u_0, v_0)$ est un point de Σ , alors les vecteurs tangents au point $P(u_0, v_0)$ des courbes situées sur Σ et passant par $P(u_0, v_0)$ sont combinaisons linéaires de

$$[D_u P]_{(u_0, v_0)} \quad \text{et} \quad [D_v P]_{(u_0, v_0)}.$$

Définition VII.2.1. Le plan $T_{P(u_0, v_0)}\Sigma$

$$P(u_0, v_0) + \langle [D_u P]_{(u_0, v_0)}, [D_v P]_{(u_0, v_0)} \rangle$$

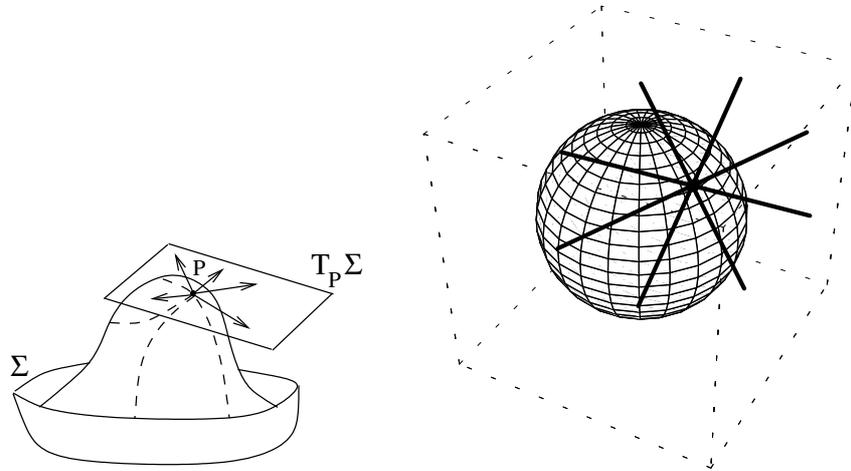
est le plan tangent à Σ au point $P(u_0, v_0)$. Il contient les vecteurs tangents en $P(u_0, v_0)$ aux courbes situées sur Σ . Une illustration est donnée à la figure VII.4.

Définition VII.2.2. Associée au paramétrage (Ω, P) , une normale unitaire au plan tangent (ou à Σ au point $P(u_0, v_0)$) est donnée par

$$N_{(u_0, v_0)} = \frac{[D_u P]_{(u_0, v_0)} \wedge [D_v P]_{(u_0, v_0)}}{|[D_u P]_{(u_0, v_0)} \wedge [D_v P]_{(u_0, v_0)}}.$$

Bien évidemment, un autre paramétrage équivalent pourrait donner une normale $-N$. Choisir l'une de ces deux normales revient à orienter la portion régulière de surface.

Définition VII.2.3. Une surface orientable est une surface dont la normale unitaire N choisie dépend continûment de $P \in \Sigma$.

FIGURE VII.4. Plan tangent à Σ au point P .

Exemple VII.2.4. Un exemple classique de surface non orientable est le *ruban de Moebius*. On l'obtient de la manière suivante. Dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, (e_1, e_2, e_3))$, on considère un segment horizontal unitaire³ de milieu M et dont les extrémités ont pour coordonnées respectives $(1/2, 0, 0)$ et $(3/2, 0, 0)$. Le ruban considéré est engendré par le segment lorsque ce dernier est soumis à deux rotations simultanées. La première s'effectue autour de l'axe Oe_3 et la seconde consiste à faire pivoter le segment autour de son milieu dans le plan vertical contenant l'axe Oe_3 et le segment. L'amplitude de la seconde rotation vaut la moitié de l'amplitude de la première. Ainsi, après un tour complet autour de Oe_3 , le segment aura pivoté sur lui-même de 180 degrés. On note θ , l'amplitude de la première rotation et $M(\theta)$ l'image du point M correspondante.

Pour pouvoir paramétrer aisément la seconde rotation, on considère un repère orthonormé mobile $(M(\theta), (e'_1, e'_2, e'_3))$ tel que $e_3 = e'_3$ et

$$e'_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2.$$

(On choisira si nécessaire e'_2 pour que les bases (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) aient la même orientation.)

Ainsi, la seconde rotation de centre $M(\theta)$ s'effectue dans le plan engendré par e'_1 et e'_3 . L'image de e'_1 par cette rotation est le vecteur

$$\cos \frac{\theta}{2} e'_1 + \sin \frac{\theta}{2} e'_3.$$

On obtient donc le paramétrage du ruban de Moebius comme suit

$$P(\theta, t) = M(\theta) + t \left(\cos \frac{\theta}{2} e'_1 + \sin \frac{\theta}{2} e'_3 \right)$$

³On considère ici un segment et un cercle unitaires pour simplement ne pas alourdir le paramétrage par l'emploi de constantes superflues.

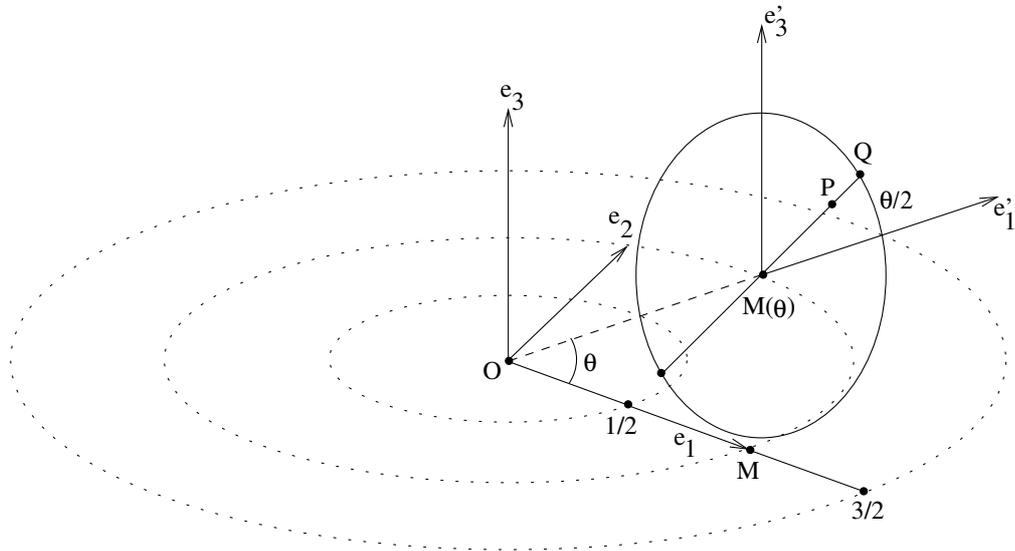


FIGURE VII.5. Paramétrage du ruban de Moebius.

pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $t \in] - 1/2, 1/2[$. Puisque $M(\theta)$ a pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ et que e'_1 a pour composantes $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, on trouve les coordonnées de $P(\theta, t)$ suivantes

Remarquons que $e'_1 = \overrightarrow{OM(\theta)}$.

$$\left((1 + t \cos \frac{\theta}{2}) \cos \theta, (1 + t \cos \frac{\theta}{2}) \sin \theta, t \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

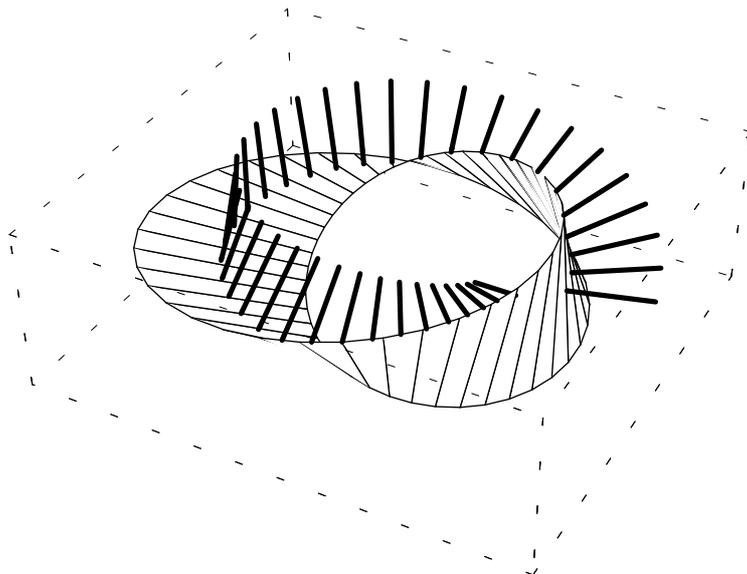


FIGURE VII.6. Le ruban de Moebius.

Nous devons à présent montrer que le ruban n'est pas orientable. Il nous faut tout d'abord obtenir sa normale. Pour éviter des calculs pénibles, nous

allons rechercher la normale en $M(\theta)$ (i.e., pour $t = 0$). Il vient

$$\begin{aligned} D_\theta P|_{t=0} &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \\ D_t P|_{t=0} &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ D_\theta P|_{t=0} \wedge D_t P|_{t=0} &= \left(\cos \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

qui n'est autre que la normale unitaire $N(\theta)$ au point $M(\theta)$. Pour montrer que la variation de $N(\theta)$ n'est pas continue, il suffit de calculer les limites

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} N(\theta) = (0, 0, -1) \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow 2\pi^-} N(\theta) = (0, 0, 1).$$

3. Surfaces cylindriques

On obtient un *cylindre (généralisé)* en translatant une courbe le long d'une direction fixée. Soit $]a, b[, P$ un a.r.c. Γ et h un vecteur non nul dirigé suivant la direction de translation. Ainsi, on obtient les points du cylindre par

$$Q(u, v) = P(u) + v h, \quad u \in]a, b[, v \in]c, d[.$$

On appelle Γ la *directrice* et les droites parallèles à h , les *génératrices*. Il s'agit d'une portion régulière de surface à condition que le vecteur $D_u P$ tangent à l'a.r.c. Γ et h soient linéairement indépendants. Les vérifications sont immédiates.

Exemple VII.3.1. Considérons le vecteur c de composantes $(0, 1/2, 1)$ et la courbe plane $((1 + \frac{1}{4} \cos 4u) \cos u, (1 + \frac{1}{4} \cos 4u) \sin u)$ située dans le plan $O+\rangle e_1, e_2\langle$. On obtient la portion régulière de surface de paramétrage

$$\left(\left(1 + \frac{1}{4} \cos 4u\right) \cos u, \left(1 + \frac{1}{4} \cos 4u\right) \sin u + \frac{v}{2}, v \right)$$

et représentée à la figure VII.7.

4. Surfaces coniques

Un *cône (généralisé)* est l'union des droites passant par un point fixe Q et s'appuyant sur un a.r.c. Γ de paramétrage (Ω, P) ne contenant pas Q . On obtient le paramétrage

$$R(u, \lambda) = (1 - \lambda)Q + \lambda P(u)$$

avec $u \in \Omega$ et on prend en général λ dans $]0, +\infty[, \mathbb{R} \setminus \{0\},]0, 1[$ ou encore $] - 1, 0[\cup]0, 1[$. Les droites $QP(u)$ sont appelées les *génératrices*.

Pour assurer à R d'être injectif, il faut que $\overrightarrow{QP}(u)$ et $\overrightarrow{QP}(u')$ soient linéairement indépendants pour tous $u, u' \in \Omega, u \neq u'$. (En particulier, c'est pour cette raison que $\lambda \neq 0$.) Les dérivées partielles sont

$$D_u R = \lambda D_u P \quad \text{et} \quad D_\lambda R = -Q + P(u) = \overrightarrow{QP}(u).$$

Ainsi, pour avoir une portion régulière de surface, il faut que $\overrightarrow{QP}(u)$ et $D_u R$ soient linéairement indépendants pour tout $u \in \Omega$.

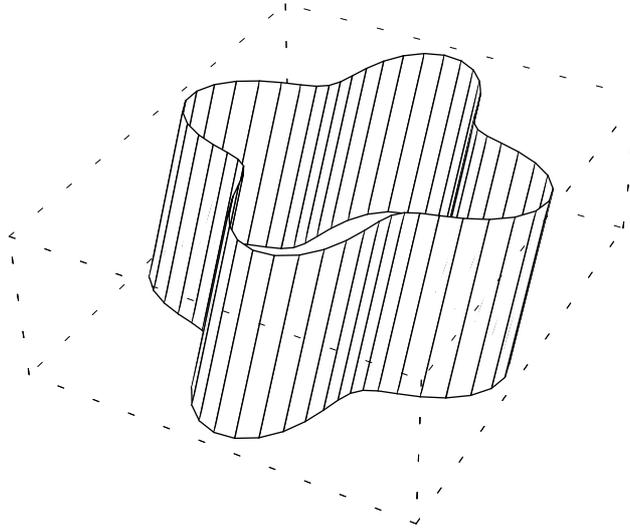


FIGURE VII.7. Une surface cylindrique.

Exemple VII.4.1. Soit le paramétrage

$$(1 - \lambda, \lambda \sin u, \lambda u), u \in] - 2\pi, 2\pi[, v \in] - 1, 1[\setminus \{0\}$$

et la portion de surface représentée à la figure VII.8.

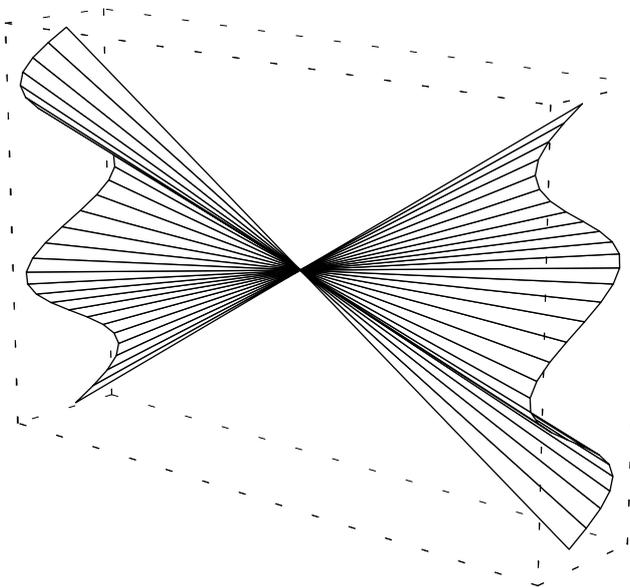


FIGURE VII.8. Une surface conique.

5. Surfaces de révolution

Une surface de révolution s'obtient par rotation d'un a.r.c. plan Γ autour d'un axe \mathcal{D} situé dans le plan de la courbe. Supposons que la courbe se situe

dans le plan $O+\rangle e_1, e_3\langle$ et que \mathcal{D} coïncide avec $O+\rangle e_3\langle$. Dans ce cas, un point de Γ est de la forme

$$P(u) = (f(u), 0, g(u)), \quad u \in \Omega$$

et en effectuant la rotation, on obtient

$$Q(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in \Omega, v \in]0, 2\pi[.$$

On trouve

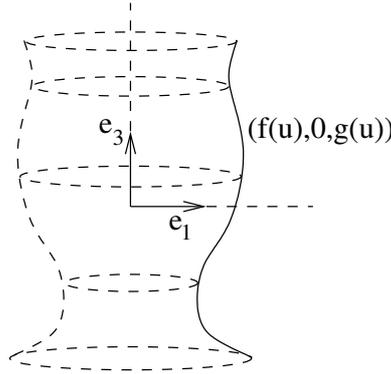


FIGURE VII.9. Rotation de $(f(u), 0, g(u))$ autour de e_3 .

$$D_u Q = ([D_u f]_u \cos v, [D_u f]_u \sin v, [D_u g]_u) \quad \text{et} \quad D_v Q = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$$

d'où

$$D_u Q \wedge D_v Q = (f(u)[D_u g]_u \cos v, -f(u)[D_u g]_u \sin v, f(u)[D_u f]_u)$$

et

$$|D_u Q \wedge D_v Q|^2 = f^2((D_u f)^2 + (D_u g)^2).$$

Puisque Γ est un a.r.c., $(D_u f)^2 + (D_u g)^2$ n'est jamais nul et donc, on a une portion régulière de surface si $f(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$, i.e., si Γ n'intersecte pas l'axe de rotation.

Exemple VII.5.1. Bien évidemment, la sphère présentée à l'exemple VII.1.2 est une surface de revolution. Considérons ici un autre exemple donné par le paramétrage

$$((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, u), \quad u, v \in]0, 2\pi[$$

et représenté à la figure VII.10.

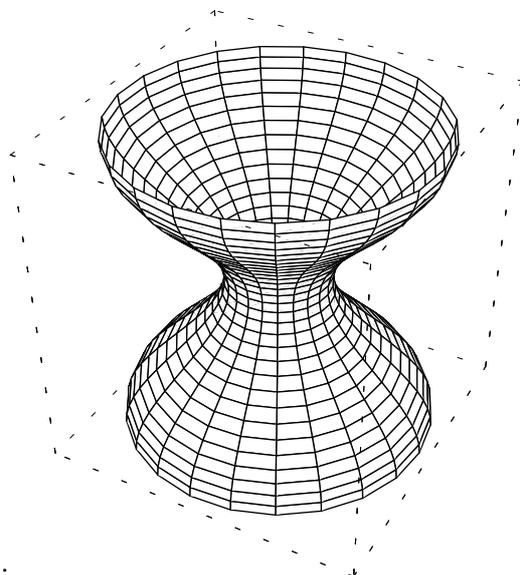


FIGURE VII.10. Une surface de révolution.

6. Surfaces réglées

Soient Γ un a.r.c. de paramétrage (Ω, P) et $c : \Omega \rightarrow \vec{A}$ une fonction à valeurs vectorielles. Une *surface réglée* est une surface engendrée par une famille de droites à un paramètre. Elle est donc de la forme

$$Q(u, \lambda) = P(u) + \lambda c(u), \quad u \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il faudra vérifier que $D_u Q$ et $D_\lambda Q$ sont linéairement indépendants. On appelle encore Γ la *directrice* et les droites de la forme $P(u) + \lambda c(u)$, les *génératrices*.

Exemple VII.6.1. Avec les notations qui précèdent, si $P(u) = (0, 0, u)$ et $c(u)$ est un vecteur de coordonnées $(\cos u, \sin u, 0)$, alors on obtient une surface réglée appelée *conoïde droit* ou *hélicoïde* et représenté à la figure VII.11.

7. Surfaces quadriques

Pour conclure ce chapitre et par analogie aux coniques du plan, on s'intéresse aux surfaces possédant une équation cartésienne de la forme

$$(25) \quad a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2a_4 xy + 2a_5 yz + 2a_6 xz + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0$$

qui peut encore se réécrire matriciellement

$$(x \ y \ z) \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{(b_1 \ b_2 \ b_3)}_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0.$$

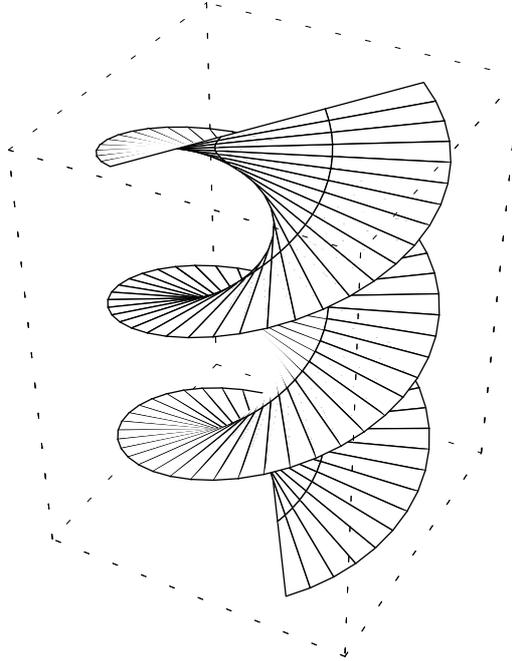


FIGURE VII.11. Un conoïde droit.

Théorème VII.7.1. *En appliquant un déplacement euclidien \mathcal{M} , on peut en changeant de repère transformer l'équation cartésienne (25) d'une quadrique non vide, en l'une des équations canoniques suivantes*

- (1) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$, *ellipsoïde,*
- (2) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1$, *hyperboloïde à une nappe,*
- (3) $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1$, *hyperboloïde à deux nappes,*
- (4) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z$, *paraboloïde elliptique,*
- (5) $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$, *paraboloïde hyperbolique,*
- (6) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0$, *cône,*
- (7) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$, *cylindre elliptique,*
- (8) $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$, *cylindre hyperbolique,*
- (9) $\frac{x^2}{p^2} = y$, *cylindre parabolique,*
- (10) $x = 0$, *plan,*
- (11) $x^2 = p^2$, *deux plans parallèles,*
- (12) $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 0$, *deux plans sécants,*
- (13) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 0$, *une droite,*
- (14) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 0$, *un point.*

Démonstration. La preuve découle principalement d'un résultat d'algèbre. Une matrice réelle symétrique A est diagonalisable par une matrice orthogonale M . Nous pouvons de plus imposer que $\det M = 1$. Ainsi, on

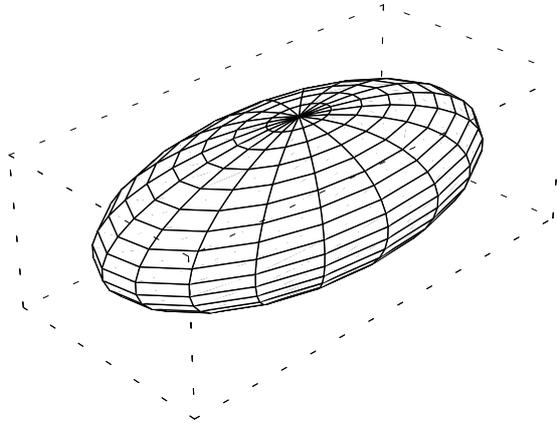


FIGURE VII.12. Ellipsoïde.

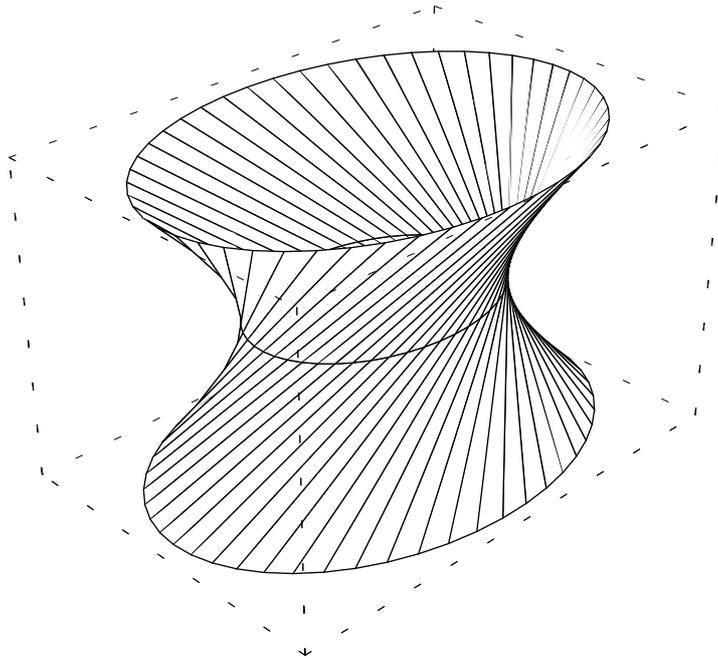


FIGURE VII.13. Hyperboloïde à une nappe.

$M\widetilde{M} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A . Ainsi, l'équation (25) se réécrit

$$(x \ y \ z) \widetilde{M} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c.$$

Posons

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ ou encore, } (x \ y \ z) \widetilde{M} = (x' \ y' \ z').$$

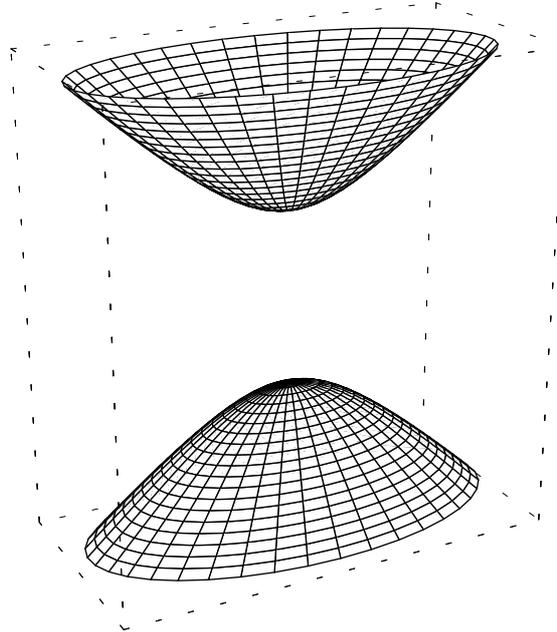


FIGURE VII.14. Hyperboloïde à deux nappes.

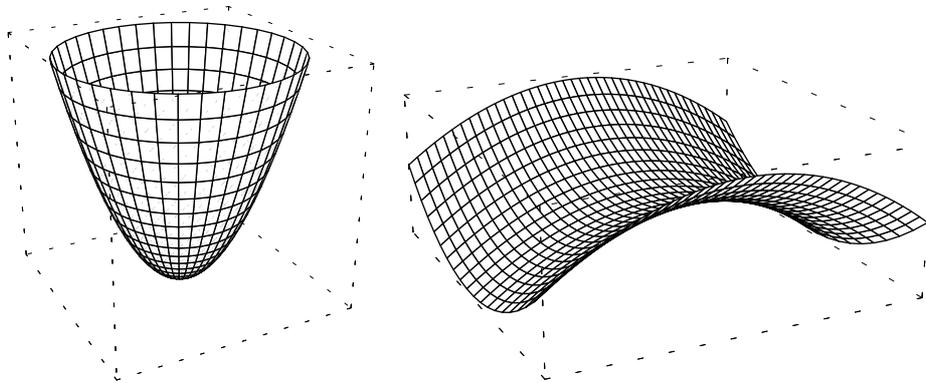


FIGURE VII.15. Paraboloïdes elliptique et hyperbolique.

Dès lors, puisque $\widetilde{M}M = I$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

et l'équation devient

$$(x' \ y' \ z') \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + c$$

où $B' = (b'_1 \ b'_2 \ b'_3) = (b_1 \ b_2 \ b_3) \widetilde{M}$. Nous savons depuis le chapitre V, section 7, qu'une matrice orthogonale M telle que $\det M = 1$ représente une

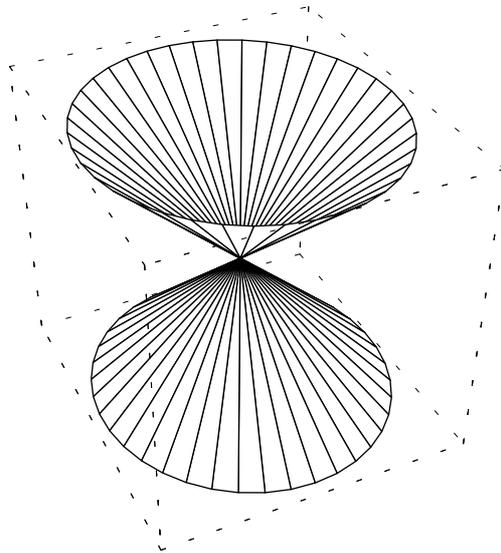


FIGURE VII.16. Cône.

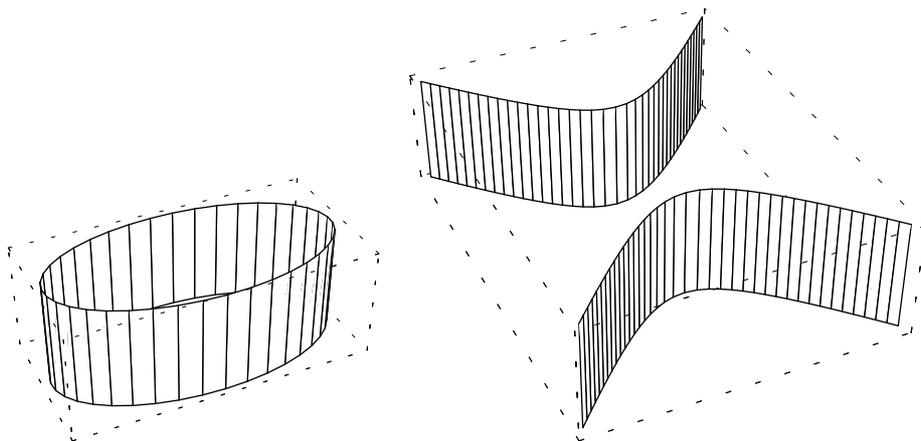


FIGURE VII.17. Cylindres elliptique et hyperbolique.

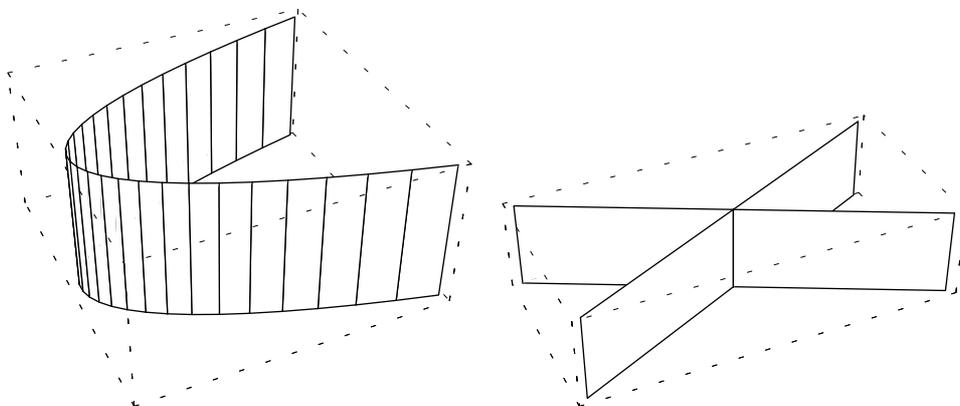


FIGURE VII.18. Cylindre parabolique et deux plans sécants.

rotation de l'espace affiné euclidien à trois dimensions. Nous venons dès lors de montrer qu'une rotation bien choisie dont l'axe passe par l'origine permet d'éliminer les termes en xy , xz et yz de l'équation (25). Nous allons donc supposer être en présence d'une équation de la forme

$$(26) \quad a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Si dans (26), $a_1 \neq 0$, alors, en posant $x' = x + \frac{b_1}{2a_1}$ (ce qui correspond à une translation), on obtient une équation de la forme

$$a_1x'^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_2y + b_3z + c' = 0$$

où $c' = c - \frac{b_1^2}{4a_1}$. Cela signifie donc que, lorsque $a_1 \neq 0$, par une translation convenable, on peut supposer $b_1 = 0$. On procède de manière semblable avec a_2 et a_3 .

• Si a_1 , a_2 et a_3 sont tous non nuls dans (26), alors on se ramène par translation à une équation de la forme

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + c = 0$$

qui correspond aux cas **(1)**, **(2)** ou **(3)** si $c \neq 0$ et suivant les signes de a_1, a_2, a_3 . Si $c = 0$, on trouve les cas **(6)** et **(14)**.

• Si exactement un des trois coefficients a_1 , a_2 ou a_3 est nul dans (26) (supposons ici $a_3 = 0$), l'équation se réduit à

$$a_1x^2 + a_2y^2 + b_3z + c = 0.$$

Si $b_3 \neq 0$, en posant $z = (z' - c)/b_3$ (ce qui correspond à une translation et à un changement d'échelle), on trouve une équation du type

$$a_1x^2 + a_2y^2 + z = 0$$

correspondant aux cas **(4)** et **(5)**. Si par contre, $b_3 = 0$, on a une équation de la forme

$$a_1x^2 + a_2y^2 + c = 0.$$

Si $c = 0$, on a les cas **(12)** et **(13)**. Si $c \neq 0$, on trouve les cas **(7)** et **(8)**.

• Si deux coefficients sont nuls, par exemple $a_2 = a_3 = 0$, et le troisième coefficient est non nul, $a_1 \neq 0$, l'équation (26) est de la forme

$$(27) \quad a_1x^2 + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Si b_2 et b_3 ne sont pas tous deux nuls, une rotation dans le plan yz de telle sorte que le nouvel axe des y soit parallèle au vecteur (b_2, b_3) permet d'annuler b_3 . Enfin, une translation permet d'annuler c et on trouve une équation de la forme

$$a_1x^2 + y = 0$$

correspondant au cas **(9)**. Si $b_2 = b_3 = 0$ dans (27), alors le cas $c = 0$ donne **(10)** et si $c \neq 0$, on a **(11)**.

• Enfin, si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dans (26), on a l'équation d'un plan et par déplacement euclidien, on se ramène encore au cas **(10)**.

■

Quelques rappels d'algèbre linéaire

Cet appendice a pour but de rappeler quelques résultats sur les systèmes linéaires utilisés dans ce cours. Toutes les démonstrations se trouvent dans le cours d'algèbre linéaire. Les définitions omises seront simplement illustrées par quelques exemples numériques.

1. Systèmes d'équations linéaires

Définition A.1.1. Soient n et p deux entiers naturels positifs et $a_{11}, \dots, a_{1p}, a_{21}, \dots, a_{2p}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{np}$ des nombres réels. Un *système d'équations linéaires* à n équations et p inconnues est un système de la forme

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}.$$

Ce système peut encore se mettre sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On dit que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_p^n$ est la *matrice du système*, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des *inconnues* et $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ est le *second membre* du système. Les matrices A et b sont supposées connues. Ainsi, on dénote encore le système (\mathbf{S}) sous la forme

$$Ax = b.$$

Tout vecteur x qui vérifie $Ax = b$ est dit *solution* du système. Cela signifie que x doit satisfaire simultanément les p équations.

Exemple A.1.2. Soit le système de deux équations à trois inconnues

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système peut se mettre sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ et $x_3 = 0$ est solution du système. Matriciellement, il s'agit du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si on désigne les colonnes de A par C_1, \dots, C_p , le système (\mathbf{S}) peut encore se mettre sous la forme vectorielle,

$$\sum_{j=1}^n x_j C_j = b.$$

Exemple A.1.3. Si on reprend l'exemple précédent, ce système peut se réécrire

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition A.1.4. Un système de la forme $Ax = b$ tel que $b = 0$ est dit *homogène*. Un système est *compatible* s'il possède au moins une solution. Sinon, il est dit *incompatible*. Par exemple, un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours la solution $x = 0$.

Soit $Ax = b$, un système (\mathbf{S}) . Le système obtenu en remplaçant le second membre b par 0 est appelé le *système homogène associé* à (\mathbf{S}) .

Si un système possède une et une seule solution, il est dit *déterminé*. S'il possède plus d'une solution, il est dit *indéterminé*.

Enfin, deux systèmes sont *équivalents* s'ils possèdent les mêmes solutions.

Exemple A.1.5. Le système de l'exemple A.1.2 est compatible puisqu'il possède au moins une solution. En fait, il en possède même une infinité. On vérifie que tout vecteur de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 + 3\lambda \\ -1 - 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

est solution du système quelle que soit la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc d'un système indéterminé. Le système homogène associé au système de l'exemple A.1.2 est donné par

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Remarque A.1.6. La somme de deux solutions (resp. le produit par un nombre réel d'une solution) d'un système homogène (\mathbf{S}) est encore solution de (\mathbf{S}) . La démonstration de cette propriété est laissée au lecteur. De même, le lecteur vérifiera à l'aide d'un contre-exemple que cette propriété n'est pas vraie pour un système non homogène.

Exemple A.1.7. Soit le système linéaire donné par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Il est immédiat que ce système ne possède aucune solution puisqu'il n'est pas possible de trouver x_1 et x_2 satisfaisant simultanément les deux équations.

On peut par exemple noter qu'un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours la solution triviale $x_1 = \dots = x_p = 0$.

Déterminer si un système linéaire est ou non compatible est une question apparaissant à de nombreuses reprises dans ce cours de géométrie. Le plus souvent, ce problème intervient dans le cas de systèmes linéaires paramétriques.

Exemple A.1.8. Soit le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 = 3 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Dans ce cas très simple, il est clair que si $\lambda = 1$, le système n'est pas compatible (on se ramène en fait au système de l'exemple précédent), par contre si $\lambda \neq 1$, le système possède une unique solution.

Ainsi, le but de la section suivante sera de présenter le plus simplement possible une méthode systématique permettant de décider si un système est ou non compatible. Pour ce faire, introduisons une dernière notation.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_p^n$ et $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_q^n$, alors on note $(A|B)$ la matrice $n \times (p + q)$ obtenue en juxtaposant A et B , i.e.,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_{n1} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est parfois appelée *matrice augmentée* du système.

2. Rang et systèmes linéaires

Soit A une matrice $m \times n$. La construction d'une sous-matrice revient à extraire les éléments se trouvant sur certaines lignes et certaines colonnes afin d'obtenir une nouvelle matrice. Considérons les entiers i_1, \dots, i_r et j_1, \dots, j_s tels que

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m,$$

$$1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n.$$

On pose

$$A_{(i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_s)} = (a_{i_k j_\ell})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq \ell \leq s}}$$

On dit que cette matrice est une *sous-matrice* de A .

Exemple A.2.1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

On a par exemple,

$$A_{(1,2;1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{(1;1,2,3,4)} = (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad A_{(2,3;2,3)} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

n'est pas une sous-matrice de A !

Définition A.2.2. Soit A une matrice. Le nombre de lignes de A linéairement indépendantes est égale au nombre de colonnes de A linéairement indépendantes et est aussi égale à la dimension de la plus grande sous-matrice (carrée) de A ayant un déterminant non nul. Ce nombre est appelé le *rang* de A et on le note

$$\text{rg}(A).$$

Nous supposons le lecteur capable de calculer des déterminants de matrices carrées de dimension ≤ 4 .

Exemple A.2.3. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car on vérifie facilement que $\det M = 0$ et par exemple, que

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

La proposition suivante lie la notion de rang avec la compatibilité des systèmes linéaires.

Proposition A.2.4. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- i) *Le système (S) : $Ax = b$ est compatible,*
- ii) *le rang de A est égal au rang de $(A|b)$.*

■

Exemple A.2.5. Nous allons appliquer cette proposition à l'exemple simpliste donné dans l'exemple A.1.8

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 = 3. \end{cases}$$

La matrice du système et la matrice augmentée sont respectivement égales à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 3 \end{pmatrix}.$$

La plus grande sous-matrice carrée contenue dans $(A|b)$ est de dimension 2. Par conséquent, le rang de $(A|b)$ est au plus 2, il est en fait exactement 2 car

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ainsi, au vu de la proposition précédente, le système est compatible si et seulement si $\text{rg } A = 2$. Autrement dit, le système est compatible si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \neq 0,$$

i.e., $\lambda \neq 1$. (On retrouve bien évidemment la même solution que précédemment.) Sur un exemple si simple, la méthode proposée peut paraître inutilement lourde. Cependant, dans des cas plus complexes, cette procédure a le grand avantage d'être systématique et de toujours se ramener à de simples calculs de rang. Notons que rechercher les conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles un système est compatible s'appelle *l'élimination* des paramètres.

Etant à présent conscient que le calcul de rang revêt un intérêt tout particulier, nous désirons clore cet appendice en présentant une technique de calcul de rang plus rapide que celle consistant à passer en revue tous les déterminants de sous-matrices carrées d'une matrice donnée.

Définition A.2.6. Soient A une matrice $m \times n$, S une sous-matrice $k \times k$ de A et T une sous-matrice $(k+1) \times (k+1)$ de A . On dit que T borde S si S est une sous-matrice de T .

Exemple A.2.7. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ici, T borde S .

Proposition A.2.8. Une matrice A est de rang r si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites

- i) il existe une sous-matrice carrée S de A de dimension r telle que $\det S \neq 0$,
- ii) toutes les sous-matrices carrées qui bordent S possèdent un déterminant nul.

■

Exemple A.2.9. Appliquons le résultat précédent pour vérifier que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2. Tout d'abord, la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

occupant le coin supérieur gauche est de déterminant non nul et les quatre matrices carrées de dimension 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

sont toutes de déterminant nul.

APPENDICE B

Petit lexique de géométrie élémentaire

Ce petit lexique présente de manière non formelle quelques objets classiques de la géométrie. Nous ne précisons pas le contexte dans lequel ces notions peuvent être considérées (espace affín euclidien, etc...).

Trois points non alignés forment un *triangle*. Un triangle ABC est *équilatéral* si ses côtés sont de même longueur, i.e., $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. Il est *isocèle* en A si ses deux côtés d'extrémité A ont même longueur, i.e., $\overline{AB} = \overline{CA}$. Un triangle est *rectangle* en A si AB est perpendiculaire à AC . Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'*hypothénuse*.

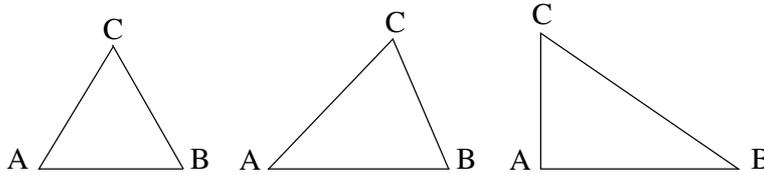


FIGURE B.1. Triangles équilatéral, isocèle, rectangle.

Un triangle est *acutangle* si tous ses angles sont aigus. S'il possède un (et un seul) angle obtus, il est dit *obtusangle*.

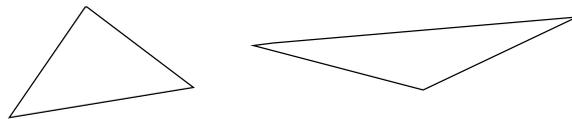


FIGURE B.2. Triangles acutangle et obtusangle.

Le *lieu* des points qui jouissent d'une propriété donnée est l'ensemble de tous les points pour lesquels cette propriété est satisfaite.

Ainsi, dans le plan, le lieu des points équidistants d'un point fixe C est un *cercle* \mathcal{C} de centre C . Si A, B sont deux points distincts de \mathcal{C} , le segment $[A, B]$ est une *corde* de \mathcal{C} . Le segment $[A, C]$ est un *rayon* de \mathcal{C} . Enfin, si A, B, C sont alignés, alors $[A, B]$ est un *diamètre*.

Soient A, B deux points distincts du plan. La *médiatrice* du segment $[A, B]$ est le lieu des points équidistants des extrémités de ce segment. C'est une droite qui passe par le milieu de $[A, B]$ et qui est perpendiculaire à AB .

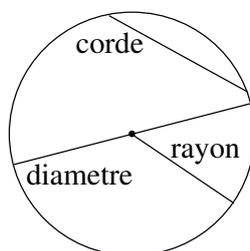


FIGURE B.3. Cercle, rayon, diamètre, corde.

Considérons deux droites sécantes \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Le lieu des points équidistants de ces deux droites est formé de deux droites perpendiculaires appelées *bissectrices*. Lorsqu'on s'intéresse à un angle α formé par \mathcal{D} et \mathcal{D}' , on parle alors de la *bissectrice intérieure* et de la *bissectrice extérieure* à α . La propriété fondamentale d'une bissectrice est qu'elle coupe un angle en deux angles égaux.

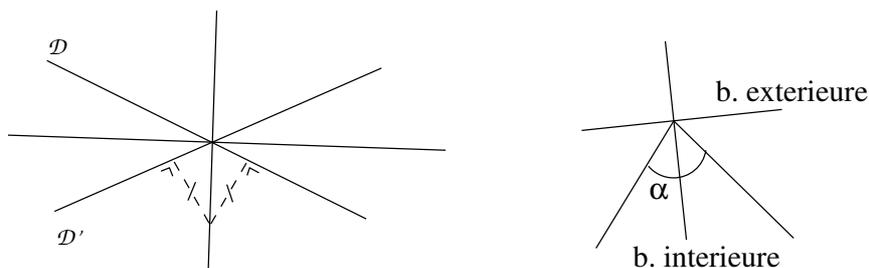


FIGURE B.4. Bissectrices.

Soit ABC un triangle. La *hauteur* issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé BC . L'intersection des hauteurs s'appelle l'*orthocentre*.

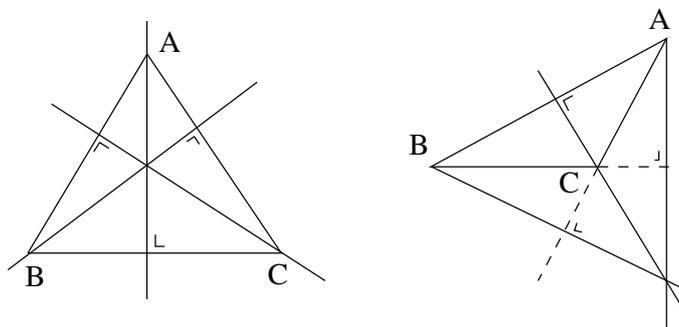


FIGURE B.5. Hauteurs d'un triangle.

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes (i.e., se coupent en un même point). Leur intersection est le centre du *cercle circonscrit* au triangle.

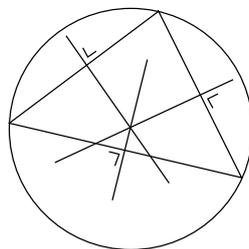


FIGURE B.6. Cercle circonscrit à un triangle.

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes. Leur intersection est le centre du *cercle inscrit* au triangle.

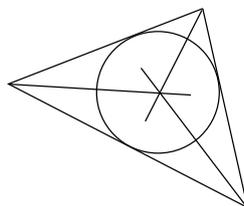
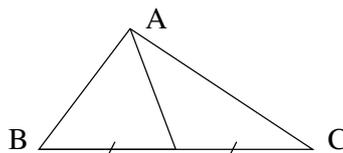


FIGURE B.7. Cercle inscrit à un triangle.

Dans un triangle ABC , la *médiane* issue de A est la droite passant par A et par le milieu du côté opposé $[B, C]$. Les médianes sont concourantes au centre de gravité du triangle.

FIGURE B.8. Médiane issue de A .

On appelle *polygone* à n côtés, la figure formée par n points. On prendra comme convention d'énumérer les points dans le sens trigonométrique. Un polygone est *convexe* si tout segment ayant ses extrémités sur les côtés du polygone est inclus dans le polygone.

Si un polygone a quatre côtés, on parle de *quadrilatère*. La figure B.10 reprend quelques quadrilatères classiques : parallélogramme, carré, trapèze, losange.

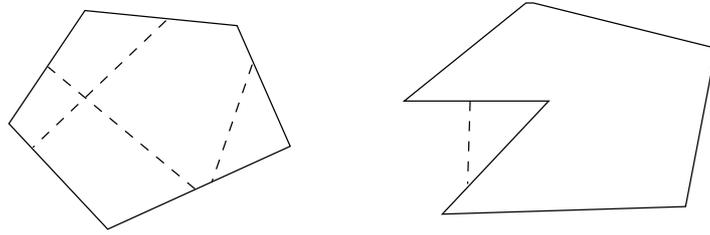


FIGURE B.9. Polygone convexe ou non.

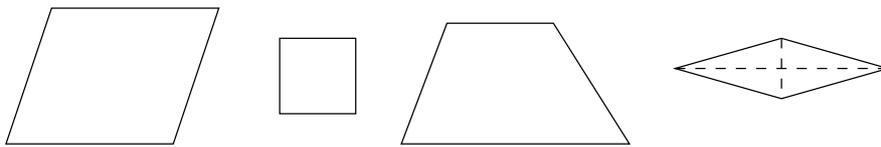


FIGURE B.10. Parallélogramme, carré, trapèze, losange.

Si les côtés d'un polygone sont égaux, alors on parle de polygone *régulier*.

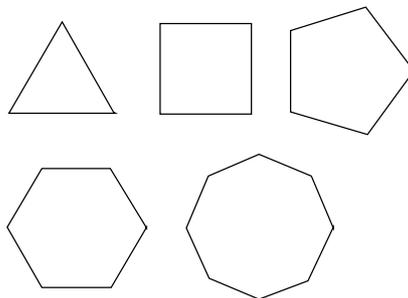


FIGURE B.11. Quelques polygones réguliers.

APPENDICE C

Lettres grecques

L'écriture mathématique fait un usage fréquent des lettres grecques. Nous avons donc décidé de les rappeler ci-dessous.

| minuscule | majuscule | |
|-------------------------|------------|---------|
| α | | alpha |
| β | | beta |
| γ | Γ | gamma |
| δ | Δ | delta |
| ϵ, ε | | epsilon |
| ζ | | zeta |
| η | | eta |
| θ, ϑ | Θ | theta |
| ι | | iota |
| κ | | kappa |
| λ | Λ | lambda |
| μ | | mu |
| ν | | nu |
| ξ | Ξ | xi |
| \omicron | | omicron |
| π, ϖ | Π | pi |
| ρ | | rho |
| σ, ς | Σ | sigma |
| τ | | tau |
| υ | Υ | upsilon |
| ϕ, φ | Φ | phi |
| χ | | chi |
| ψ | Ψ | psi |
| ω | Ω | omega |

Liste des figures

| | | |
|-------|--|----|
| I.1 | Somme de deux fonctions s'annulant en 1. | 4 |
| I.2 | Bases de \mathbb{R}^2 . | 11 |
| I.3 | Décomposition d'un vecteur dans une base. | 14 |
| I.4 | Changement de base. | 15 |
| I.5 | Un polynôme de degré 2 et une base de $\mathbb{R}[x]_2$. | 17 |
| I.6 | Décomposition de $P(x)$ dans la base U' . | 17 |
| I.7 | Un sous-espace vectoriel contenant deux vecteurs u et v et leurs combinaisons linéaires. | 19 |
| I.8 | Droites vectorielles de \mathbb{R}^2 . | 27 |
| I.9 | Droite vectorielle de \mathbb{R}^3 . | 28 |
| I.10 | Un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . | 29 |
| I.11 | Plans vectoriels contenant une droite vectorielle. | 31 |
| I.12 | Trois plans ne se coupant pas suivant une même droite vectorielle. | 32 |
| II.1 | \mathbb{R}^2 : espace affín ou espace vectoriel. | 34 |
| II.2 | \mathbb{R}^2 : espace affín et espace vectoriel. | 35 |
| II.3 | Relation de Chasles | 35 |
| II.4 | Vecteurs liés équipollents. | 37 |
| II.5 | Un parallélogramme | 37 |
| II.6 | La règle du parallélogramme. | 38 |
| II.7 | Combinaison affín de deux points. | 39 |
| II.8 | Combinaison affín de trois points. | 39 |
| II.9 | Centre de gravité de trois points. | 40 |
| II.10 | Centre de masse. | 40 |
| II.11 | Calcul d'une combinaison affín de points. | 41 |
| II.12 | Un exemple de variété affín. | 43 |
| II.13 | Sous-vectoriel directeur d'une variété affín. | 44 |
| II.14 | Une droite. | 45 |
| II.15 | A chaque point de PQ correspond un unique réel λ . | 45 |
| II.16 | Positions relatives de deux droites du plan. | 48 |

| | | |
|--------|--|----|
| II.17 | Positions relatives de deux droites de l'espace. | 49 |
| II.18 | Positions relatives de deux plans de l'espace. | 49 |
| II.19 | Positions relatives d'une droite et d'un plan. | 50 |
| II.20 | Repère. | 51 |
| II.21 | Changement de repère. | 52 |
| II.22 | Une droite du plan déterminée par un point et un vecteur directeur. | 54 |
| II.23 | Coefficient directeur d'une droite. | 55 |
| II.24 | Faisceau de droites passant par P . | 56 |
| II.25 | Une droite peut être représentée de diverses façons. | 58 |
| II.26 | Un plan déterminé par un point et deux vecteurs directeurs. | 60 |
| II.27 | Droite s'appuyant sur deux droites gauches et contenant P . | 62 |
| II.28 | Droite s'appuyant sur deux droites gauches et parallèle à une droite donnée. | 62 |
| III.1 | Angle non orienté entre deux vecteurs. | 67 |
| III.2 | Orthogonalisation de Gram-Schmidt. | 68 |
| III.3 | Les vecteurs u, v, w . | 69 |
| III.4 | Quatre bases orthonormées. | 71 |
| III.5 | Changement de bases orthonormées. | 72 |
| III.6 | L'ensemble des bases est partitionné en deux. | 73 |
| III.7 | (u, v) est positive, (u', v') ne l'est pas. | 73 |
| III.8 | Deux orientations, deux sens de rotation. | 74 |
| III.9 | Angles orientés. | 75 |
| III.10 | Les deux orientations possibles de \mathbb{R}^3 . | 75 |
| III.11 | Dans l'espace, des bases positives induisent deux sens de rotation différents dans un même plan. | 76 |
| III.12 | Dans l'espace, des bases positives induisent deux sens de rotation différents. | 76 |
| III.13 | Parallélépipède construit sur u, v, w . | 79 |
| III.14 | Complément orthogonal. | 81 |
| IV.1 | Coordonnées polaires. | 85 |
| IV.2 | Coordonnées cylindriques. | 86 |
| IV.3 | Coordonnées sphériques. | 86 |
| IV.4 | Angle de deux droites. | 87 |
| IV.5 | Angle d'une droite et d'un hyperplan. | 88 |

| | | |
|-------|--|-----|
| IV.6 | Angle de deux hyperplans. | 89 |
| IV.7 | Projection orthogonale d'un point sur un hyperplan. | 91 |
| IV.8 | La projection orthogonale d'un point sur un hyperplan est unique. | 92 |
| IV.9 | Projection orthogonale d'un point sur une droite. | 92 |
| IV.10 | Distance d'un point à une variété affine. | 93 |
| IV.11 | Distance d'un point à une droite. | 94 |
| IV.12 | Perpendiculaire commune et distance de deux droites gauches. | 95 |
| IV.13 | Angles à côtés perpendiculaires. | 97 |
| IV.14 | Projection orthogonale de l'angle α sur le plan π . | 98 |
| IV.15 | Triangle sphérique. | 100 |
| IV.16 | Des ensembles convexes. | 100 |
| IV.17 | Quelques enveloppes convexes. | 101 |
| IV.18 | Dodécaèdre, icosaèdre et octaèdre. | 104 |
| IV.19 | Développement du cube, du dodécaèdre et de l'icosaèdre. | 105 |
| IV.20 | Développement de l'octaèdre et du tétraèdre. | 105 |
| V.1 | Translation du triangle PQR . | 108 |
| V.2 | Image des points P, Q, R par une homothétie de centre C et de rapport 2. | 108 |
| V.3 | Le théorème de Thalès. | 109 |
| V.4 | Symétrie centrale de centre C . | 110 |
| V.5 | Projection sur π parallèlement à \mathcal{D} . | 112 |
| V.6 | Projection sur \mathcal{D} parallèlement à π . | 113 |
| V.7 | Symétrique du point A par rapport à π et parallèlement à \mathcal{D} . | 114 |
| V.8 | Symétrique du point A par rapport à \mathcal{D} et parallèlement à π . | 114 |
| V.9 | Rotation de centre C et d'amplitude θ . | 116 |
| V.10 | Rotation dans l'espace | 118 |
| VI.1 | $P(u) = (\sin \frac{u}{3}, \sin \frac{u}{2}), u \in]0, 12\pi[.$ | 121 |
| VI.2 | $P(u) = (\frac{\cos u}{u}, \frac{\sin u}{u}), u \in]1, +\infty[.$ | 121 |
| VI.3 | Deux arcades de cycloïde. | 121 |
| VI.4 | $P(u) = (\cos u - \cos 9u, \sin u - \sin 9u), u \in]0, 2\pi[.$ | 122 |
| VI.5 | Hélice circulaire. | 122 |
| VI.6 | Hélice sphérique. | 123 |

| | | |
|-------|--|-----|
| VI.7 | Deux paramétrages du demi-cercle. | 124 |
| VI.8 | Tangente à un a.r.c. | 124 |
| VI.9 | Sens de parcours. | 125 |
| VI.10 | Découpage d'une portion d'a.r.c. | 126 |
| VI.11 | Abscisse curviligne. | 126 |
| VI.12 | Changement de paramètres et paramétrage naturel. | 128 |
| VI.13 | Spirale logarithmique. | 128 |
| VI.14 | Courbure d'un cercle. | 131 |
| VI.15 | Concavité orientée dans le sens de la normale principale. | 131 |
| VI.16 | Approximation au premier ordre. | 132 |
| VI.17 | Approximation au second ordre. | 132 |
| VI.18 | Le trièdre de Frenet le long de l'hélice circulaire. | 137 |
| VI.19 | Le cercle osculateur en un point P de l'hélice circulaire. | 137 |
| VI.20 | Interprétation géométrique de la courbure signée. | 138 |
| VI.21 | Signification de κ_s . | 139 |
| VI.22 | La spirale de Cornu. | 141 |
| VI.23 | Deux courbes ayant même courbure. | 141 |
| VI.24 | L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. | 142 |
| VI.25 | La parabole $y^2 = 4ax$. | 143 |
| VI.26 | L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. | 144 |
| VI.27 | L'hyperbole équilatère $xy = c^2$. | 144 |
| VI.28 | Changement de repère. | 145 |
| VI.29 | Une ellipse centrée en $(2, -1)$. | 145 |
| VI.30 | Une hyperbole centrée en $(-1, 3)$. | 146 |
| VI.31 | Rotation centrée à l'origine. | 147 |
| VI.32 | Une hyperbole d'équation $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 3 = 0$. | 148 |
| VI.33 | Equation polaire d'une conique. | 149 |
| VI.34 | Point d'abscisse 0 appartenant à la conique (pour $\epsilon <, =, > 1$). | 150 |
| VI.35 | Détermination de $d(P, K)$. | 150 |
| VI.36 | Ellipses et leur centre respectif pour des excentricités 0,7; 0,5; 0,35 et 0,1 (ℓ constant, origine du repère au foyer). | 151 |
| VI.37 | Ellipses et leur centre respectif pour des valeurs de $\ell = 2; 1,5; 1$ et 0,5 (ϵ constant). | 151 |
| VI.38 | Une ellipse et ses deux foyers. | 152 |

| | | |
|--------|---|-----|
| VI.39 | Pourquoi $r' = \ell + \epsilon x'$. | 153 |
| VI.40 | Ellipse, tangente et foyers... | 154 |
| VI.41 | Une parabole. | 154 |
| VI.42 | Propriété focale de la parabole. | 155 |
| VI.43 | Hyperbole, tangente, foyers... | 155 |
| VII.1 | Une portion régulière de surface. | 158 |
| VII.2 | Un paramétrage par des coordonnées. | 158 |
| VII.3 | Courbe située sur Σ . | 159 |
| VII.4 | Plan tangent à Σ au point P . | 160 |
| VII.5 | Paramétrage du ruban de Moebius. | 161 |
| VII.6 | Le ruban de Moebius. | 161 |
| VII.7 | Une surface cylindrique. | 163 |
| VII.8 | Une surface conique. | 163 |
| VII.9 | Rotation de $(f(u), 0, g(u))$ autour de e_3 . | 164 |
| VII.10 | Une surface de révolution. | 165 |
| VII.11 | Un conoïde droit. | 166 |
| VII.12 | Ellipsoïde. | 167 |
| VII.13 | Hyperboloïde à une nappe. | 167 |
| VII.14 | Hyperboloïde à deux nappes. | 168 |
| VII.15 | Paraboloïdes elliptique et hyperbolique. | 168 |
| VII.16 | Cône. | 169 |
| VII.17 | Cylindres elliptique et hyperbolique. | 169 |
| VII.18 | Cylindre parabolique et deux plans sécants. | 169 |
| B.1 | Triangles équilatéral, isocèle, rectangle. | 177 |
| B.2 | Triangles acutangle et obtusangle. | 177 |
| B.3 | Cercle, rayon, diamètre, corde. | 178 |
| B.4 | Bissectrices. | 178 |
| B.5 | Hauteurs d'un triangle. | 178 |
| B.6 | Cercle circonscrit à un triangle. | 179 |
| B.7 | Cercle inscrit à un triangle. | 179 |
| B.8 | Médiane issue de A . | 179 |
| B.9 | Polygone convexe ou non. | 180 |
| B.10 | Parallélogramme, carré, trapèze, losange. | 180 |
| B.11 | Quelques polygones réguliers. | 180 |

Index

Notations

| | |
|---|-----|
| (r, θ) (coordonnées polaires) | 85 |
| (r, θ, ϕ) (coordonnées sphériques) . | 86 |
| (r, θ, z) (coordonnées cylindriques) 85 | |
| F^\perp (complément orthogonal) | 80 |
| PQ (droite) | 45 |
| $[P, Q]$ (segment) | 45 |
| $[u, v, w]$ (produit mixte) | 77 |
| κ (courbure) | 130 |
| $\langle x, x \rangle$ (carré scalaire) | 66 |
| $\langle x, y \rangle$ (produit scalaire) | 65 |
| \vec{b} (binormale) | 132 |
| \vec{n} (normale principale) | 131 |
| \vec{t} (tangente unitaire) | 130 |
| $\rangle x_1, \dots, x_p \langle$ (enveloppe linéaire) . . | 20 |
| τ (torsion) | 133 |
| $ x $ (norme, module) | 66 |
| $\ x\ $ (norme, module) | 66 |
| $h_{C,k}$ (homothétie) | 108 |
| t_u (translation) | 107 |
| $u \wedge v$ (produit vectoriel) | 77 |
| $d(P, \mathcal{V})$ (distance) | 92 |
| $\text{proj}_{\mathcal{D}, \pi}$ (projection parallèle) | 113 |
| $\text{proj}_{\pi, \mathcal{D}}$ (projection parallèle) | 112 |
| $\text{sym}_{\mathcal{D}, \pi}$ (symétrie) | 114 |
| $\text{sym}_{\pi, \mathcal{D}}$ (symétrie) | 113 |

A

| | |
|----------------------------------|-----|
| abscisse curviligne | 126 |
| affinité | 107 |
| angle | |
| deux droites | 87 |
| deux hyperplans | 88 |
| droite et hyperplan | 88 |
| non orienté | 67 |
| application affine | 107 |
| arc régulier de courbe | 120 |

| | |
|-------------------------|------|
| associativité | 1, 2 |
|-------------------------|------|

B

| | |
|---------------------------------|-----|
| barycentre | 38 |
| base | 10 |
| canonique | 11 |
| matrice de changement de base . | 16 |
| orthogonale | 69 |
| orthonormée | 69 |
| binormale | 132 |
| bissectrice | 178 |
| extérieure | 178 |
| intérieure | 178 |

C

| | |
|---------------------------------------|------|
| carré scalaire | 66 |
| Cauchy-Schwarz (inégalité de) | 66 |
| centre de gravité | 38 |
| cercle | 177 |
| circonscrit | 178 |
| corde | 177 |
| diamètre | 177 |
| inscrit | 179 |
| rayon | 177 |
| cercle osculateur | 132 |
| champ | 1 |
| Chasles (relation de) | 35 |
| coefficient directeur | 55 |
| combinaison affine | 38 |
| combinaison linéaire | 6 |
| coefficient | 6 |
| commutativité | 1, 2 |
| complément orthogonal | 80 |
| complémentaire d'un angle | 88 |
| composantes | 13 |
| conique | 149 |
| directrice | 149 |

- excentricité 149
 foyer 149
 convexe 179
 coordonnée 50
 coordonnée
 cylindrique 85
 polaire 85
 sphérique 86
 Cornu (spirale) 141
 corps 2
 courbe 120
 arc régulier 120
 binormale 132
 centre de courbure 132
 courbure 130
 Lissajou 120
 normale principale 131
 paramétrage 120
 équivalent 124
 naturel 127
 rayon de courbure 132
 rayon de torsion 133
 tangente 124
 torsion 133
 vecteur tangent 124
 courbure 130
- D**
- dépendance
 affine 50
 linéaire 6
 déplacement euclidien 139
 dimension 12
 direction 42
 distance
 deux points 89
 deux variétés affines 96
 point/variété affine 92
 droite 45, 46
 coefficient directeur 55
 orthogonale 90
 droite vectorielle 25
- E**
- ellipse 142
 enveloppe linéaire 20
 equation
- cartésienne (sous-espace vectoriel)
 24
 cartésienne (variété affine) 53
 indépendante 24
 paramétrique (sous-espace vectoriel)
 21
 paramétrique cartésienne (variété affine)
 53
 paramétrique vectorielle (variété affine)
 53
 equipollence 36
 espace affín 33
 point 33
 espace vectoriel 2
 complexe 3
 dimension 12
 droite vectorielle 25
 euclidien 65
 hyperplan vectoriel 25
 plan vectoriel 25
 réel 3
 sous-espace 18
 sous-espace propre 19
 sous-espace trivial 19
- F**
- fonction
 à valeurs dans \mathcal{A} 119
 à valeurs dans $\overline{\mathcal{A}}$ 119
 Frenet (formules de) 132
 Frenet (trièdre) 132
 Fresnel (intégrale de) 141
- G**
- Gram-Schmidt (procédé) 68
 groupe 2
 commutatif 2
- H**
- hélice circulaire 120
 hauteur 178
 homothétie 108
 hyperbole 143
 équilatère 143
 asymptote 143
 rectangulaire 143
 hyperplan
 médiateur 97

- orthogonal 90
 perpendiculaire 91
 hyperplan affiné 46
 hyperplan vectoriel 25
- I**
- inégalité triangulaire 89
 indépendance linéaire 6
 interne 2
 isobarycentre 38
 isométrie 107
 négative 112
 positive 112
 isomorphisme 14
- L**
- lieu 177
 Lissajou (courbe de) 120
 longueur d'arc 126
- M**
- médiane 179
 médiatrice 177
 matrice
 sous-matrice 173
 matrice orthogonale 71
 milieu 38
 Minkowski (inégalité de) 66
 Moebius (ruban) 160
- N**
- neutre 1, 2
 normale principale 131
- O**
- opposé 1, 2
 orthocentre 178
- P**
- parabole 143
 parallélogramme 37
 paramétrage 120, 157
 équivalent 124
 naturel 127
 partie
 génératrice 10
 liée 9
 libre 9
 perpendiculaire commune 95
- plan 46
 plan affiné 34
 plan osculateur 131
 plan vectoriel 25
 point 33
 affinement dépendant 50
 affinement indépendant 50
 k-uple 123
 multiple 123
 point fixe 107
 polyèdre 101
 régulier 101
 polygone 179
 régulier 180
 produit mixte 77
 produit scalaire 65
 produit vectoriel 77
 projection orthogonale
 d'un point 91
 d'un angle 98
 projection parallèle à un hyperplan 113
 projection parallèle à une droite 112
- Q**
- quadrilatère 179
- R**
- rang 174
 relation linéaire 6
 repère 50
 coordonnée 50
 origine 50
 orthonormé 85
 rotation 115
 amplitude 116
 centre 115
 ruban de Moebius 160
- S**
- scalaire 2
 segment 45
 simplexe 50
 sous-espace affiné 42
 sphère 99
 spirale logarithmique 128
 Steinitz (théorème de) 9
 surface
 orientable 159

- paramétrage 157
 portion régulière 157
 symétrie 113, 114
 centrale 109
 système d'équations 171
 compatible 172
 déterminé 172
 équivalent 172
 homogène 172
 incompatible 172
 inconnue 171
 indéterminé 172
 matrice augmentée 173
 matrice du système 171
 second membre 171
 solution 171
- T**
- tangente 124
 Thalès (théorème de) 109
 torsion 133
 translation 107
 trièdre de Frenet 132
 triangle 177
 acutangle 177
 équilatéral 177
 hypoténuse 177
 isocèle 177
 obtusangle 177
 rectangle 177
 sphérique 99
- V**
- variété affine 42
 dimension 46
 direction 42
 orthogonale 90
 parallèle 47
 sous-vectoriel directeur 42
 vecteur 3
 équipollent 36
 composantes 13
 lié 36
 linéairement
 dépendant 6
 indépendant 6
 module 66
 normé 66
- norme 66
 nul 3
 orthogonal 67
 produit scalaire 65
 tangent 124
 unitaire 7