Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique
2ème année, 2002-2003

OPTIMISATION DYNAMIQUE

Nizar TOUZI

CREST, touzi@ensae.fr

http://www.crest.fr/pageperso/lfa/touzi/touzi.htm

Contents

Ces notes de cours correspondent à un enseignement de deuxième année de l'ENSAE. Le cours a été organisé en sept séances de deux heures. Bien évidemment, il n'a pas été possible de traiter tous les points prévus. En particulier, j'ai renvoyé à ces notes pour certains points techniques, et je me suis borné à en expliquer l'intuition. Le dernier chapitre de ces notes n'a pas été abordé en cours, et est présenté dans ces notes à titre de complément.

Bien qu'ayant relu attentivement ces notes, je reste persuadé qu'il reste plusieurs imperfections. Je demande aux élèves de m'en excuser, et de me les signaler afin d'en améliorer la qualité. Leurs camarades de l'année prochaine leur en seront reconnaissants.

Chapter 1

Introduction

1.1 Rappels : optimisation statique

1.1.1 Définitions

Soit E un espace vectoriel normé (de dimension non nécessairement finie), et considérons le problème de minimisation

$$\phi \ := \ \inf_{x \in K} \ \varphi(x) \ , \tag{1.1.1}$$

où $x \in E$ est la variable de *contrôle*, $\varphi : E \longrightarrow I\!R$ est la *fonction objectif*, et $K \subset E$ est l'ensemble des *décisions possibles*.

Le but de ce paragraphe est de rappeler le traitement général du problème d'optimisation ci-dessus.

a. La première question qui se pose est le problème d'existence :

$$\exists \ ? \ x^* \in K \ : \qquad \phi \ := \ \varphi(x^*) \ . \tag{1.1.2}$$

Dans le cas où la réponse à cette question est positive, il est intéressant de se poser le problème d'unicité du minimum.

b. Si l'existence d'une solution au problème (1.1.1) est assurée, on peut alors écrire des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre (d'Euler). Dans le cas non contraint ($K = E$), la condition nécessaire se réduit à la condition de nullité du gradient au point de minimum.

Si l'ensemble des décisions possibles K est décrit par des contraintes d'égalité et d'inégalité, les méthodes de dualité classiques conduisent alors au théorème de Kuhn et Tucker, qui se réduit au théorème de Lagrange en absence de contraintes d'inégalité.

Notons que les conditions nécessaires d'optimalité peuvent être utilisées pour résoudre le problème d'existence (1.1.2). En effet, deux cas peuvent se présenter :

- Si aucun point de E ne vérifie les conditions nécessaires du premier ordre, alors le problème (1.1.1) n'admet pas de solution dans K.

- Si les conditions nécessaires du premier ordre permettent de sélectionner un ensemble non vide de points de E, on peut recourir à des conditions suffisantes d'optimalité pour en discuter l'optimalité.

Avant de procéder à l'énoncé précis de ces résultats, rappelons les définitions et résultats suivant :

- Un sous-ensemble K d'un espace métrique est *compact* si et seulement si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite convergente.

- Une fonction φ définie sur un espace métrique et à valeurs réelles est *semi-continue inférieurement* si et seulement si $\liminf_{x' \to x} \varphi(x') \geq \varphi(x)$ pour tout $x \in E$,.

- Une fonction $\varphi : E \longrightarrow I\!R$ est *différentiable* en un point $x \in E$ s'il existe une application linéaire $D\varphi(x)$ de E dans $I\!R$ telle que

$$\varphi(x+h) \quad = \quad \varphi(x) + D\varphi(x) \cdot h + |h|\varepsilon(h) \ ,$$

où $\varepsilon : E \longrightarrow I\!R$ est une fonction qui tend vers zéro quand $|h| \to 0$. Quand E est de dimension finie $D\varphi(x)$ est le gradient de φ en x, et on a :

$$D\varphi(x) \cdot h \quad = \quad \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, h_i \ ,$$

où $(\partial\varphi/\partial x_i)(x)$ est la dérivée partielle au point x par rapport à la variable x_i.

- Un sous-ensemble K d'un espace vectoriel est *convexe* si et seulement si, pour tous $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

- Soit K un ensemble convexe. Une fonction $\varphi : K \longrightarrow I\!R$ est *convexe* (resp. *strictement convexe*) si et seulement si, pour tous $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$, $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq$ (resp. $<$) $\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

1.1.2 Les résultats d'existence

Voici le résultat principal.

Théorème 1.1.1 *Supposons que la fonction φ est semi-continue inférieurement et que l'ensemble K est compact. Alors le problème* (1.1.1) *admet une solution, i.e. il existe $x^* \in K$ tel que $\phi = \varphi(x^*)$.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante pour le problème (1.1.1), i.e.

$$x_n \in K \quad \text{pour tout } n \text{ et } \quad \varphi(x_n) \longrightarrow \phi.$$

Comme K est compact, on peut extraire une suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge vers un élément $x^* \in K$. On a bien évidemment $\varphi(x^*) \geq \phi$. Pour obtenir l'inégalité inverse, on utilise l'hypothèse de semi-continuité de ϕ :

$$\phi \;=\; \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \;=\; \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) \;\geq\; \liminf_{x'\to x^*} \varphi(x') \;\geq\; \varphi(x^*)\ .$$

$\square$

En pratique, ce théorème est difficile à utiliser quand l'espace E est de dimension infinie. En dimension finie, les ensembles compacts s'identifient aux ensembles fermés bornés, et le théorème ci-dessus est souvent utilisé sous la forme suivante.

Corollaire 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et K un sous-ensemble fermé de E. Supposons que φ est une fonction semi-continue inférieurement de E dans $I\!R$ vérifiant :*

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) + \chi_K(x) \;=\; +\infty \quad \textit{avec} \quad \chi_K(x) \;=\; \begin{cases} 0 \textit{ si } x \in K \\ +\infty \textit{ sinon.} \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Alors le problème (1.1.1) *admet une solution, i.e. il existe* $x^* \in K$ *tel que* $\phi = \varphi(x^*)$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante pour le problème (1.1.1), i.e. $\phi = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$.
1. Commençons par montrer que la suite $(x_n)_n$ est bornée. Si elle ne l'était pas, on peut en extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ d'éléments de K qui tend vers l'infini. On a alors, d'après la condition (1.1.3)

$$\phi \;=\; \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) \;=\; +\infty \;,$$

ce qui est exclu par le fait que φ prend des valeurs dans $I\!R$.
2. Soit $M := \sup_{n\geq 0} |x_n|$, et $K_M := K \cap \{x \in E \;:\; |x| \leq M\}$. Comme E est de dimension finie et K est fermé, il est clair que l'ensemble K_M est un compact de E. Par ailleurs, comme $x_n \in K_M$ pour tout n, on déduit que $\phi = \sup_{x\in K_M} \varphi(x)$. Le résultat d'existence est maintenant obtenue par application directe du théorème 1.1.1. □

Nous terminons ce paragraphe par une condition suffisante pour l'unicité d'une solution pour le problème de minimisation (1.1.1), s'il l'existence est satisfaite.

Théorème 1.1.2 *Si l'ensemble* K *est convexe et la fonction* φ *est strictement convexe, le problème de minimisation* (1.1.1) *admet au plus une solution.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions x_1^* et x_2^* pour le problème de minimisation (1.1.1), et soit $x^* := (x_1^* + x_2^*)/2$. Comme K est convexe, $x^* \in K$ et on déduit de la stricte convexité de φ que $\varphi(x^*) < [\varphi(x_1^*) + \varphi(x_2^*)]/2 = \phi$. Ceci est en contradiction avec la définition de ϕ. □

1.1.3 Condition nécessaire d'optimalité d'Euler

En l'absence de contraintes ($K = E$), il est bien connu que la fonction objectif doit admettre une différentielle $D\varphi$ nulle en tout point extrémal. Bien que cette notion soit généralisable pour des fonctions non différentiables, nous allons nous concentrer dans ce cours sur le cas régulier. Afin de prendre en compte la restriction des décisions possibles à K, nous avons besoin d'introduire la notion suivante.

Définition 1.1.1 *Soit $K \subset E$, et $x \in K$. Un élément $y \in E$ est dit tangent à K au point x (et on notera $y \in T(x,K)$) si on peut trouver une suite $(h_n)_n$ d'éléments non nuls de E et une suite $(\lambda_n)_n$ de réels strictement positifs telles que*

$$h_n \longrightarrow y \;, \quad \lambda_n \longrightarrow 0 \;, \quad \textit{et} \quad x + \lambda_n h_n \;\in\; K \;.$$

$T(x,K)$ est appelé cône tangent à l'ensemble K au point x.

Il est facile de vérifier que $T(x,K)$ est un cône convexe fermé. Cette définition, un peu compliquée, exprime le fait que $T(x,K)$ est l'ensemble des directions "qui rentrent dans K en x". Si K est un ensemble convexe, on peut la simplifier considérablement, et la réduire à la définition naturellement attendue des directions rentrant dans K.

Théorème 1.1.3 (Condition d'Euler) *Soit x^* une solution du problème* (1.1.1). *Si φ est différentiable en x^*, alors*

$$D\varphi(x^*) \cdot y \;\geq\; 0 \quad \textit{pour tout} \quad y \in T(x,K) \;. \tag{1.1.4}$$

Démonstration. Soit $y \in T(x^*,K)$. Le résultat est trivial pour $y = 0$, on se concentre alors sur le cas $y \neq 0$. Par définition du cône tangent, il existe une suite $(h_n)_n$ d'éléments non nuls de E et une suite $(\lambda_n)_n$ de réels strictement positifs telles que

$$h_n \longrightarrow y \;, \quad \lambda_n \longrightarrow 0 \;, \quad \text{et} \quad x^* + \lambda_n h_n \;\in\; K \;.$$

Comme x^* est solution de (1.1.1), on a

$$|\lambda_n h_n|^{-1} \left[\varphi(x^* + \lambda_n h_n) - \varphi(x^*)\right] \;\;\geq\;\; 0 \;,$$

et, en utilisant la différentiabilité de φ au point x^*, on obtient par passage à la limite :

$$D\varphi(x^*) \cdot |y|^{-1} y \quad \geq \quad 0 \; .$$

$\square$

Si l'ensemble K est ouvert, on vérifie facilement que $T(x, K) = E$ pour tout $x \in K$. On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.2 *Soient K un sous-ensemble ouvert de E, et x^* une solution du problème* (1.1.1)*. Si φ est différentiable en x^*, alors*

$$D\varphi(x^*) \quad = \quad 0 \; .$$

1.1.4 Conditions suffisantes d'optimalité

On dira qu'un point x^* est un *minimum local* pour le problème (1.1.1) s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\varphi(x^*) \quad = \quad \min_{x \in K \cap B(x^*, r)} \varphi(x) \; ,$$

où $B(x, r)$ est la boule ouverte centrée en x et de rayon r. On dira que x est un *minimum global* pour le problème (1.1.1) si $\phi = \varphi(x^*)$.

Pour écrire des conditions suffisantes d'optimalité, nous allons supposer que la fonction objectif φ est deux fois différentiable au point x^*. Rappelons que ceci veut dire qu'il existe une application bilinéaire symétrique $D^2\varphi : E \times E \longrightarrow I\!R$ telle que

$$\varphi(x^* + h) \quad = \quad \varphi(x^*) + D\varphi(x^*) \cdot h + \frac{1}{2} D^2\varphi(x^*)(h, h) + |h|^2 \varepsilon(h) \tag{1.1.5}$$

où $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ quand $h \to 0$. On dira que x est un point *régulier* pour φ si φ est deux fois différentiable en x. Si E est de dimension finie d, on a :

$$D^2\varphi(x^*)(h, h) \quad = \quad \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \; h_i h_j \; .$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de (1.1.5).

Théorème 1.1.4 *Soit $x^* \in K$ un point régulier pour φ, vérifiant la condition d'Euler* (1.1.4)*. Supposons que :*

$$D^2\varphi(x^*)(h,h) \ < \ 0 \quad \textit{pour tout} \quad h \in T(K,x^*), \ h \neq 0 \ .$$

Alors x^* est une solution locale de (1.1.1)*.*

Corollaire 1.1.3 *Si K est convexe et φ est convexe, alors tout point x^* de différentiabilité de φ vérifiant la condition d'Euler* (1.1.4) *est une solution globale de* (1.1.1)*.*

1.1.5 Contraintes d'égalité et d'inégalité

Dans ce paragraphe, nous étudions le cas où l'espace E est de dimension finie d, et l'ensemble des décisions possibles K est décrit par un nombre fini p de contraintes d'inéglité :

$$K \ = \ \{x \in E \ : \ b_j(x) \leq 0, \ 1 \leq j \leq p \text{ pour tout } x \in E\} \ , \quad (1.1.6)$$

$b : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$ étant une fonction donnée de composantes $b_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons que ce cadre inclut le cas des contraintes d'égalité dès que b admet deux composantes opposées.

Afin d'appliquer la condition d'Euler du théorème 1.1.3, on doit exprimer plus explicitement le cône tangent $T(K,x)$ en tout point $x \in K$. Pour celà, il convient de distinguer, parmi les contraintes d'inégalité, celles qui sont saturées :

$$J(x) \ := \ \{j = 1, \ldots, p \ : \ b_j(x) = 0\} \ .$$

Il est alors facile de montrer que, si b_j est continuement différentiable en x pour tout $j \in J(x)$, alors

$$T(K,x) \ \subset \ \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ y \cdot Db_j(x) \leq 0 \text{ pour tout } j \in J(x)\} \ .$$

Malheureusement, l'inclusion inverse n'est pas toujours vérifiée. Le résultat suivant donne une condition suffisante pour l'égalité entre ces deux cônes. On notera

$$J^{conc}(x) \ := \ \{j \in J(x) \ : \ b_j \text{ est une fonction concave au voisinage de } x\} \ .$$

Proposition 1.1.1 *Supposons que b soit continue en x, et que b_j soit différentiable en x pour tout $j \in J(x)$. S'il existe $y \in I\!R^n$ tel que*

$$y \cdot Db_j(x) \;\leq\; 0 \;,\; j \in J^{conc}(x) \quad et \quad y \cdot Db_j(x) \;<\; 0 \;,\; j \in J(x) \setminus J^{conc}(x) \;,$$

alors $T(K, x) = \{y \in I\!R^n \;:\; y \cdot Db_j(x) \leq 0$ pour tout $j \in J(x)\}$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 1.1.2 *Un point $x \in K$ est dit $K-$qualifié si la fonction b est différentiable en x et*

$$T(K, x) \;=\; \{y \in I\!R^n \;:\; y \cdot Db_j(x) \leq 0 \text{ pour tout } j \in J(x)\} \;.$$

Introduisons la fonctions $L : E \times I\!R^p \longrightarrow I\!R$ définie par :

$$L(x, \lambda) \;:=\; \varphi(x) + \lambda \cdot b(x) \;.$$

Cette fonction est appelée *Lagrangien* associé au problème de minimisation (1.1.1) avec contraintes d'inégalités décrites par (1.1.6). Les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés *multiplicateurs de Lagrange*. Le résultat suivant fournit une écriture plus explicite de la condition d'Euler du théorème 1.1.3.

Théorème 1.1.5 (Kuhn et Tucker) *Supposons que l'ensemble des décisions possibles soit décrit par* (1.1.6)*, et soit x^* une solution du problème de minimisation* (1.1.1)*. Si φ est différentiable en x^*, et si x^* est un point $K-$qualifié, alors :*

$$\begin{array}{c} \text{il existe } \lambda \in I\!R^p_+ \text{ vérifiant } \; DL(x^*, \lambda) \;=\; 0 \\ \text{ainsi que les relations d'exclusion } \; \lambda_j \; b_j(x^*) = 0, \; 1 \leq j \leq p \;. \end{array} \tag{1.1.7}$$

Démonstration. Soit x^* une solution $K-$qualifiée du problème de minimisation (1.1.1). Comme φ est différentiable en x^*, on peut écrire la condition d'Euler du théorème 1.1.3 :

$$D\varphi(x^*) \cdot y \;\geq\; 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in T(K, x^*) \;.$$

On utilise maintenant l'expression de $T(K,x^*)$, conséquence du fait que x^* est un point $K-$qualifié. La condition d'Euler fournit alors la propriété suivante :

$$\text{pour tout } y \in I\!\!R^n \ , \quad [\ \max_{j\in J(x^*)} Db_j(x^*)\cdot y \ \le\ 0 \ \Longrightarrow\ -D\varphi(x^*)\cdot y \ \le\ 0\ ]\ .$$

D'après le lemme de Farkas, cette propriété est équivalente à

$$\text{il existe } \lambda_j \ge 0\ , \quad j\in J(x^*)\ , \quad \text{tels que} \quad -D\varphi(x^*) \ = \sum_{j\in J(x^*)} \lambda_j Db_j(x^*)\ .$$

Ceci définit des multiplicateurs λ_j pour les contraintes saturées $j\in J(x^*)$. Pour les contraintes non saturées, on pose tout simplement

$$\lambda_j \ := \ 0 \quad \text{pour tout} \quad j\notin J(x^*)\ ,$$

et la démonstration du théorème est complète. □

Nous terminons ce paragraphe par l'énoncé du théorème de Lagrange qui donne les conditions du premier ordre du problème (1.1.1) dans le cas où l'ensemble K est décrit par des contraintes d'égalité :

$$K \ = \ \{x\in E \ : \ a_j(x)\le 0,\ 1\le j\le m \text{ pour tout } x\in E\}\ . \qquad (1.1.8)$$

De même que dans le cas plus général des contraintes d'inégalité, si a_j est différentiable en x pour tout $j=1,\ldots,m$, on a

$$T(K,x) \ \subset \ \{y\in E \ : \ y\cdot Da_j(x)=0,\ 1\le j\le m\}\ , \qquad (1.1.9)$$

et x est un point $K-$qualifié si l'inclusion inverse est vérifiée. Le résultat suivant donne une condition suffisante de $k-$qualification.

Proposition 1.1.2 *Soit K le sous-ensemble de E définit par* (1.1.8)*, et x un poin de K. Supposons que*

(i) *a_j soit continuement différentiable au voisinage de x pour tout $j=1,\ldots,m$,*

(ii) *Les gradients des contraintes $\{Da_j(x),\ 1\le j\le m\}$ forment un système libre.*

Alors x est $K-$qualifié.

La démonstration de cette proposition peut être consultée par exemple dans .... Dans le cadre de contraintes a l'égalité, le théorème de Kuhn et Tucker se réduit à la forme suivante.

Théorème 1.1.6 (Lagrange) *Supposons que l'ensemble des décision possibles soit donné par* (1.1.8), *et soit x^* une solution du problème de minimisation* (1.1.1). *Si φ est différentiable en x^*, et si x^* est un point $K-$qualifié, alors :*

$$\textit{il existe } \lambda^* \in I\!R^m \textit{ vérifiant } \; DL(x^*, \lambda^*) \;=\; 0 \,. \tag{1.1.10}$$

1.2 Introduction à l'optimisation dynamique

Dans ce paragraphe, nous allons étudier un problème de consommation optimale en temps discret. En horizon fini, ce problème peut être traité par les techniques d'optimisation statique. Nous allons néanmoins l'approcher par les outils de l'optimisation dynamique, sujet de ce cours, afin de les introduire. Le cadre du temps discret rend les idées sous-jacentes plus transparentes.

1.2.1 Modèle de consommation optimale en temps discret

On considère un agent économique doté d'un capital initial $x > 0$. Soit $T \in I\!N \cup \{+\infty\}$ une date donnée. On notera par $X(t)$ la valeur de sa richesse à toute date t.

- A chaque date $t \in I\!N$, $t \leq T$, l'agent doit décider de la répartition de sa richesse entre consommation, $c(t)$, et épargne.

- On supposera que l'épargne est capotalisée á un taux d'intérêt nul. Notons que l'on peut toujours se ramener à ce cadre en considérant la valeur capitalisée de l'épargne comme numéraire.

- Il n'y a ni entrée ni sortie d'argent à partir de la date $t = 1$.

On voit alors immédiatement que la richesse de l'agent est régie par la dynamique

$$X(t) - X(t-1) \;=\; -c(t) \quad \text{pour tout} \quad 1 \;\leq\; t \;\leq\; T \;,$$

si bien que la richesse est entièrement déterminée par le capital initiale et la politique de consommation :

$$X^c_{0,x}(t) \;\;:=\;\; X(t) := x - \sum_{s=0}^{t-1} c_s \;.$$

Les préférences de l'agent sont caractérisées par sa fonction d'utilité intertemporelle

$$U(c) \;:=\; \sum_{t=0}^{T} u(t, c(t)) \quad \text{pour tout} \quad c = (c(t), 0 \leq t \leq T) \;\in\; I\!R^T_+ \;,$$

où

$$\begin{array}{rccc} u \;: & I\!N \times I\!R_+ & \longrightarrow & I\!R \\ & (t,\xi) & \longmapsto & u(t,\xi) \;. \end{array}$$

Pour tout $t \in I\!N$, on supposera que la fonction $\xi \longmapsto u(t,\xi)$ est croissante, strictement concave, continuement dérivable sur $I\!R_+$, et vérifie la condition d'Inada :

$$u_\xi(t, 0^+) \;\;:=\;\; \lim_{\xi \searrow 0} \frac{\partial u}{\partial \xi}(t,\xi) \;=\; +\infty \;. \tag{1.2.1}$$

L'objectif de l'agent est alors défini par le problème de maximisation d'utilité :

$$V(x) \;\;:=\;\; \max_{c \in \mathcal{A}_0(x)} U(c) \;, \tag{1.2.2}$$

où $\mathcal{A}_0(x)$ est l'ensemble des plans de consommation $c \in I\!R^T_+$ tels que $U(c)$ est bien défini (en tant que série, si $T = +\infty$) et vérifiant la contrainte de budget :

$$X^c_{0,x}(t) \;\geq\; 0 \quad \text{pour tout} \quad 0 \;\leq\; t \;\leq\; T \;. \tag{1.2.3}$$

Remarque 1.2.1 La condition d'Inada (1.2.1) simplifie le traitement du problème car elle assure que tout plan de consommation c situé sur le bord $\partial I\!\!R_+^T$ de $I\!\!R_+^T$ est dominé (au sens du critère U) par un autre plan de consommation situé à l'intérieur du domaine.

En effet, comme la richesse initiale x est strictement positive, le plan de consommation $(c(t))_{0\leq t\leq T} = 0$ (qui consiste a jeter le capital initial) ne peut être optimale. Soient alors deux dates t_0 et t_1, et un plan de consommation $c \in \mathcal{A}_0(x)$ tel que $c(t_0) = 0$ et $x_1 := c(t_1) > 0$. Consiérons le plan de consommation

$$\tilde{c}(t) := c(t) \ , \quad t \notin \{t_0, t_1\} \ , \quad \tilde{c}(t_0) := \varepsilon x_1 \quad \text{et} \quad \tilde{c}(t_1) := (1-\varepsilon)x_1 \ .$$

On utilise la stricte concavité de $\xi \longmapsto u(t,\xi)$, puis la condition d'Inada (1.2.1), pour obtenir

$$\begin{aligned} U(\tilde{c}) - U(c) &= [u(t_0, \varepsilon x_1) - u(t_0, 0)] + [u(t_1, (1-\varepsilon)x_1) - u(t_1, x_1)] \\ &\geq \varepsilon x_1 \left[u_\xi(t_0, \varepsilon x_1) - u_\xi(t_1, (1-\varepsilon)x_1)\right] \ > \ 0 \end{aligned}$$

pour ε assez petit. Ainsi le plan de consommation $\tilde{c} \in \mathcal{A}_0(x)$, et il procure un niveau d'utilité strictement supérieur à celui de c.

1.2.2 Modèle à horizon fini

On commence par considérer le cas $T < \infty$. Notons que du fait de la stricte croissance de la fonction d'utilité $\xi \longmapsto u(T,\xi)$, un plan de consommation optimal doit vérifier $c(T) = X_{0,x}^c(T)$. On ré-écrit alors le problème de maximisation d'utilité (1.2.2) sous la forme

$$V(x) \ = \ \sup_{c\in\mathcal{A}(x)(x)} U(c) \quad \text{avec} \quad U(c) \ := \ \sum_{t=0}^{T-1} u(t, c(t)) + u(T, X_{0,x}^c(T)) \tag{1.2.4}$$

où l'ensemble des plans de consommation admissibles est donné par :

$$\mathcal{A}(x) \ := \ \left\{ c \in I\!\!R_+^T \ : \ |c|_1 \leq x \right\} \ .$$

Ici, $|z| := \sum |z_i|$.

On est ainsi confronté à un problème de maximisation d'une fonction continu (conséquence de la concavité) sur un domaine fermé borné de $I\!R^T$. Comme $T < \infty$, il s'agit d'un compact, et le théorème 1.1.1 garantit l'existence d'une solution. Les hypothèses de stricte concavité permttent de conclure ̀l'unicité de cette solution.

La caractérisation de la solution du problème (1.2.4) peut être obtenue au moins par deux méthodes différentes :

1. D'après la remarque 1.2.1, la solution du problème 1.2.4 est située à l'intérueir du domaine. Nous pouvons alors écrire la condition du premier ordre pour ce problème en oubliant la contrainte de positivité des consommations ou, plus exactement, en remplaçant $\mathcal{A}(x)$ par son intérieur dans la définition du problème (1.2.4). D'après le corollaire 1.1.2, le plan de consommation optimal c^* vérifie la condition du premier ordre :

$$\frac{\partial U}{\partial c(t)}\,(c^*(t)) \;=\; u_\xi\,(t, c^*(t)) - u_\xi\left(T, X_{0,x}^{c^*}(T)\right) \;=\; 0 \quad \text{pour tout} \quad t = 0, \ldots, T-1 \;.$$

Comme $u'_\xi(t,.)$ est strictement décroissante et continue pour tout $0 \leq tleT$, elle admet une inverse $I(t,.)$. Si on suppose de plus que

$$u_\xi(t, +\infty) \;=\; 0 \quad \text{pour tout} \quad t = 0, \ldots, T-1 \;,$$

on voit que la condition du premier s'écrit :

$$c^*(t) \;=\; I\left(t, u_\xi(T, X_{0,x}^{c^*}(T))\right) \quad \text{pour tout} \quad t = 0, \ldots, T-1 \;,$$

2. Nous allons donner maintenant une caractérisation du plan de consommation optimal par une approche qui exploite le caractère dynamique du problème. On définit alors la *version dynamique* du problème (1.2.4) :

$$V(t,x) \;:=\; \sup_{c \in \mathcal{A}(t,x)} U(t,c) \tag{1.2.5}$$

avec :

$$U(t,c) \;\; := \;\; \sum_{s=t}^{T-1} u(s,c(s)) + u(T, X_{0,x}^c(T)) \; ,$$

pour tout $t \leq T-1$, où l'ensemble des plans de consommation admissibles est donné par :

$$\mathcal{A}(t,x) \;\; := \;\; \left\{ c \in I\!R_+^{T-t} \; : \; |c|_1 \leq x \right\} \; .$$

On a bien sûr $V(x) = V(0,x)$. Le problème $V(t,x)$ correspond au problème de consommation optimal entre les dates t et T, en partant d'une richesse initiale x à la date t. Le résultat suivant est basé essentiellement sur la forme additive dans le temps de la fonction objectif et sur la propriété de *concaténation* de l'ensemble des plans de consommation admissibles :

$$\mathcal{A}(t,x) \;\; = \;\; \left\{ (\xi, c) \; : \; 0 \leq \xi \leq x \text{ et } c \in \mathcal{A}(t+1, x-\xi) \right\} \; . \qquad (1.2.6)$$

Proposition 1.2.1 (Principe de la programmation dynamique) *Soit $t \leq T$ un entier naturel donné. Alors :*

$$V(t,x) \;\; = \;\; \sup_{0 \leq \xi \leq x} \left\{ u(t,\xi) + V(t+1, x-\xi) \right\} \; .$$

Démonstration. On écrit simplement d'après (1.2.6) :

$$\begin{aligned}
V(t,x) \;\; &:= \;\; \sup_{c \in \mathcal{A}(t,x)(x)} \sum_{s=t}^{T-1} u(s,c(s)) + u(T, X_{0,x}^c(T)) \\
&= \;\; \sup_{\substack{0 \leq \xi \leq x \\ c \in \mathcal{A}(t+1,x-\xi)}} u(t,\xi) + \sum_{s=t+1}^{T-1} u(s,c(s)) + u(T, X_{0,x}^c(T)) \\
&= \;\; \sup_{0 \leq \xi \leq x} u(t,\xi) + \sup_{c \in \mathcal{A}(t+1,x-\xi)} \sum_{s=t+1}^{T-1} u(s,c(s)) + u(T, X_{0,x-\xi}^c(T)) \\
&= \;\; \sup_{0 \leq \xi \leq x} u(t,\xi) + V(t+1, x-\xi) \; .
\end{aligned}$$

□

A présent, observons que la fonction valeur du problème dynamique (1.2.5) est connue à la date terminale :

$$V(T,x) \;=\; u(T,x) \quad \text{pour tout} \quad x \in I\!R_+ \; .$$

Par conséquent, on peut déterminer toutes les fonctions $V(t,x)$ par une procédure itérative rétrograde en utilisant le principe de la programmation dynamique.

On peut également identifier le plan de consommation optimal par la condition du premier ordre :

$$u_\xi(t,c_t^*) \;=\; V_x(t+1,x-c_t^*) \quad \text{pour tout} \quad t=0,\ldots,T \; ,$$

où on a encore utilisé la remarque 1.2.1 qui assure que le plan de consommation optimal est situé à l'intérieur du domaine.

Nous détaillerons plus les propriétés de cette approche dans le paragraphe suivant.

1.2.3 Modèle à horizon infini

Nous consiérons à présent le problème de consommation optimale à horizon infini $T=+\infty$. Comme dans le cas à horizon fini, la stricte croissance de la fonction d'utilité conduit à restreindre le plan de consommation optimal par la contrainte :

$$\sum_{t=0}^{\infty} c(t) \;=\; x \; .$$

On ré-écrit le problème de maximisation d'utilité (1.2.2) sous la forme :

$$V(x) \;=\; \sup_{c\in\mathcal{A}(x)} U(c) \tag{1.2.7}$$

avec :

$$U(c) \;=\; u\left(0, x - \sum_{t\geq 1} c(t)\right) \;+\; \sum_{t\geq 1} u(t,c(t)) \; ,$$

et

$$\mathcal{A}(x) \;:=\; \left\{ c \in I\!R^n_+ \;:\; |c|_1 \leq x \right\} .$$

Ainsi l'ensemble des plans de consommation admissibles est maintenant un sous-ensemble fermé borné de ℓ^1, espace des suites absolument convergentes. Cet espace n'étant pas de dimension fini, nous ne pouvons pas appliquer le théorème 1.1.1 d'existence. Comme le problème admet toutes les propriété de convexité souhaitées, nous obtiendrons néanmoins un résulat d'existence à partir des conditions du premier ordre.

1. Comme dans le modèle à horizon fini, nous commençons par l'application du Corollaire 1.1.2 grâce à la remarque 1.2.1. On obtient alors la condition du premier ordre :

$$u_\xi(t, c^*(t)) \;=\; u_\xi \left(0, x - \sum_{s \geq 1} c^*(s) \right) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 1 \; ,$$

dont on peut déduire une caractérisation du plan de consommation optimal en utilisant l'inversibilité de l'utilité marginale $u_\xi(t, \cdot)$.

Exercice .1 *Faire les calcul dans le cas $u(t,\xi) = \beta^t \xi^\gamma / \gamma$, où $\gamma < 1$ est un paramètre donné.*

2. Dans le reste de ce paragraphe, nous examinons l'approche par le principe de la programmation dynamique. On introduit alors la *version dynamique* associée au problème de maximisation (1.2.7) :

$$V(t, x) \;:=\; \sup_{c \in \mathcal{A}(x)} U(t, c) \tag{1.2.8}$$

avec :

$$U(t, c) \;:=\; u \left(t, x - \sum_{s > t} c(s) \right) \;+\; \sum_{s > t} u(s, c(s)) \; ,$$

et

$$\mathcal{A}(x) \ := \ \left\{ c \in I\!\!R_+^{I\!\!N} \ : \ |c|_1 \le x \right\} .$$

Remarquons que $V(x) = V(0,x)$. Dans notre context d'horizon infini, la fonction objectif est encore additive dans le temps, et la condition de concaténation des plan de consommation

$$\mathcal{A}(x) \ = \ \{(\xi, c) \ : \ 0 \le \xi \le x \text{ et } c \in \mathcal{A}(x-\xi)\} .$$

En suivant ligne par ligne la démonstration du cas à horizon fini, on obtient alors :

Proposition 1.2.2 (Principe de la programmation dynamique) *Soit t un entier naturel donné. Alors :*

$$V(t,x) \ = \ \sup_{0 \le \xi \le x} \{u(t,\xi) + V(t+1, x-\xi)\} .$$

Remarque 1.2.2 Le principe de la programmation dynamique a transformé notre problème de maximisation dans l'espace des suites en une succession de problèmes de maximisation dans l'intervalle $[0,x]$ de $I\!\!R$. Cependant, nous sommes encore face un problème en dimension infini puisque le principe de la programmation dynamique donne une equation vérifiée par la fonction $V(t,x)$: il s'agit maintenant d'un problème de point fixe dans l'espace des fonctions.

Contrairement au cas de l'horizon fini, nous ne disposons plus d'une connaissance de la fonction V à une certaine date, et nous ne pouvons donc plus appliquer le raisonnement itératif rétrograde pour affirmer que le principe de la programmation dynamique caractérise la fonction valeur V. L'exemple suivant montre que ce résultat de caractérisation n'est pas vrai sans hypothèse supplémentaire.

Exemple 1.2.1 *Considérons le cas de la fonction d'utilité*

$$u(t,x) \ = \ \beta^t \, \frac{x^\gamma}{\gamma} ,$$

où $\gamma < 1$ est un paramètre donné. Soit k_0 un réel suffisamment grand, et k : $I\!N \longrightarrow]0, \infty[$ une fonction définie par :

$$k(0) \ := \ k_0 \ \textit{et} \ \beta k(t+1) \ = \ \left[k(t)^{1/1-\gamma} - 1\right]^{1-\gamma} \quad \textit{pour tout} \quad t \in I\!N \ .$$

Alors, on voit par un calcul direct, que la fonction $V_k(t,x) := \beta^t k(t) x^\gamma/\gamma$ vérifie le principe de la programmation dynamique.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que l'équation de la programmation dynamique caractérise la fonction valeur du problème.

Proposition 1.2.3 *Soit $v : I\!N \times I\!R_+ \longrightarrow I\!R$ une solution de l'équation de la programmation dynamique vérifiant :*

$$\lim_{T\to\infty} v\left(T, x - \sum_{s=t}^{T-1} c(s)\right) \ = \ 0 \quad \textit{pour tout} \quad c \in \mathcal{A}(x) \ .$$

Alors $v = V$.

Démonstration. Pour $(t,x) \in I\!N \times I\!R_+$ fixé et $c \in \mathcal{A}(x)$, on a :

$$\begin{aligned} v(t,x) \ &\geq \ u(t,c_t) + v(t+1, x - c_t) \\ &\geq \ \cdots \ \geq \ \sum_{s=t}^{T-1} u(s,c_s) + v\left(T, x - \sum_{s=t}^{T-1} c_s\right) \ . \end{aligned}$$

En faisant tendre T vers l'infini, on déduit de notre hypothèse que :

$$v(t,x) \ \geq \ \sum_{s\geq t} u(s,c_s) \quad \text{pour tout} \quad c \in \mathcal{A}(x) \ ,$$

et par suite $v \geq V$.

Inversement, on fixe $\varepsilon > 0$ et on se donne une suite $(\delta_s)_{s\geq t}$ de réels strictement positifs telle que $\sum_{s\geq t} \delta_s = \varepsilon$. Comme v vérifie le principe de la programmation dynamique, on obtient l'existence de $c(t) \in \mathcal{A}(x)$ tel que :

$$v(t,x) \ \leq \ u(t,c(t)) + \delta_t + v(t+1, x - c(t)) \ ,$$

i.e. $c(t)$ est δ_t-optimal pour le problème de maximisation du principe de la programmation dynamique. De même, il existe $c(s) \in [0, x - c(t) - \ldots - c(s-1)]$, $s \geq t$, tel que :

$$v(t,x) \quad \leq \quad v\left(T, x - \sum_{s=t}^{T-1} c(s)\right) + \sum_{s=t}^{T-1} u(t, c_t) + \delta_t$$

La suite c ainsi construite est bien dans $\mathcal{A}(x)$. En faisant tendre T vers l'infini, on déduit de notre hypothèse que :

$$v(t,x) \quad \leq \quad \varepsilon + \sum_{s \geq t} u(t, c_t) \ ,$$

ce qui prouve que $v \leq V$ du fait que $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

Nous allons maintenant expliquer comment déduire le plan de consommation optimal à partir du principe de la programmation dynamique.

Proposition 1.2.4 *Soit c^* un plan de consommation optimal pour le problème $V(t,x)$ i.e.:*

$$c^* \ \in \ \mathcal{A}(x) \quad et \quad V(t,x) \ = \ \sum_{s \geq t} u\left(s, c^*(s)\right) \ .$$

Alors $V(t,x) = u(t, c_t^*) + V(t+1, x - c_t^*)$.

Démonstration. En utilisant la propriété de concaténation des plans de consommation (1.2.9), on voit immédiatement que :

$$\sum_{s \geq t+1} u\left(s, c^*(s)\right) \quad \leq \quad V\left(t+1, x - c^*(t)\right) \ .$$

Réciproquement, soient $\varepsilon > 0$ un paramètre fixé, et $c = (c(s))_{s \geq t}$ un plan de consommation défini par $c(t) := c^*(t)$ et $(c(s))_{s \geq t+1}$ une solution ε-optimale de $V\left(t+1, x - c^*(t)\right)$ i.e.:

$$(c(s))_{s \geq t+1} \ \in \ \mathcal{A}(x - c^*(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{s \geq t+1} u(s, c(s)) \ \geq \ V\left(t+1, x - c^*(t)\right) - \varepsilon \ .$$

On vérifie que c est bien dans $\mathcal{A}(x)$ et on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} u\left(t, c^*(t)\right) + \sum_{s \geq t+1} u\left(s, c^*(s)\right) &\geq \left(t, c^*(t)\right) + \sum_{s \geq t+1} u\left(s, c(s)\right) \\ &\geq \left(t, c^*(t)\right) + V\left(t+1, x - c^*(t)\right) - \varepsilon \; . \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

Remarque 1.2.3 D'après le principe de la programmation dynamique, on déduit de la proposition ci-dessus que c_t^* est un maximiseur dans l'équation de la programmation dynamique.

Remarque 1.2.4 D'après la démonstration précédente, on voit que si $\left(c^*(s)\right)_{s \geq t}$ est un plan de consommation optimal pour $V(t,x)$ alors $\left(c^*(s)\right)_{s \geq t+1}$ est un plan de consommation optimal pour $V\left(t+1, x - c^*(t)\right)$. En d'autres termes, *un plan de consommation optimal reste optimal le long de la trajectoire optimale.*

La dernière remarque nos conduit à l'interrogation suivante : étant donné un plan de consommation $\hat{c} = \left(\hat{c}(s)\right)_{s \geq t}$ qui maximise la suite des équations de la programmation dynamique le long de sa trajectoire, peut-on affirmer que $\hat{c}$ est solution du problème $V(t,x)$?

Proposition 1.2.5 *Soit $\hat{c} = \left(\hat{c}(s)\right)_{s \geq t} \in \mathcal{A}(x)$ un plan de consommation vérifiant pour tout $s \geq t$:*

$$V\left(s, \hat{x}(s)\right) \; = \; u\left(s, \hat{c}(s)\right) + V\left(s+1, \hat{x}(s) - \hat{c}(s)\right) \quad \textit{où} \quad \hat{x}(s) \; := \; x - \sum_{r=t}^{s-1} \hat{c}(r) \; .$$

Supposons de plus que

$$\lim_{s \to \infty} V(s, \hat{x}(s)) \;\; = \;\; 0 \; .$$

Alors $\hat{c}$ est un plan de consommation optimal pour $V(t,x)$, i.e.:

$$V(t,x) \;\; = \;\; \sum_{s \geq t} u\left(s, \hat{c}(s)\right) \; .$$

Démonstration. D'après la propriété d'optimalité de $\hat{c}$ dans le problème de maximisation de l'équation de la programmation dynamique, on voit que :

$$\begin{aligned}
V(t,x) &= u\left(t,\hat{c}(t)\right) + V\left(t+1, x-\hat{c}(t)\right) \\
&= u\left(t,\hat{c}(t)\right) + u\left(t+1,\hat{c}(t+1)\right) + V\left(t+2, x-\hat{c}(t)-\hat{c}(t+1)\right) \\
&= \ldots = \sum_{r=t}^{s-1} u\left(r,\hat{c}(r)\right) + V\left(s,\hat{x}(s)\right) \ ,
\end{aligned}$$

et on conclut en envoyant s vers l'infini. $\square$

Chapter 2

Calcul des variations

2.1 Problème

Soient $t_0 < t_1 \in I\!R$ et $F : [t_0, t_1] \times I\!R^{\times} I\!R^n \longrightarrow I\!R$ une fonction de classe C^1. Dans ce chapitre, nous étudions une première classe de problèmes dynamiques qui s'écrivent sous la forme :

$$\phi \quad := \quad \inf_{\substack{x \in C^1([t_0,t_1], I\!R^n) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) - x_1 \in C(I,J,K)}} \quad \varphi(x) \tag{2.1.1}$$

où

$$\varphi(x) \quad := \quad \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt\ .$$

où $x_0, x_1 \in I\!R^n$ sont donnés, I, J et K sont des sous-ensembles d'indices de $\{1, \ldots, n\}$, deux à deux disjoints, et

$$C(I,J,K) \quad := \quad \left\{ \xi \in I\!R^n \ : \ \xi^i \leq 0,\ \xi^j \geq 0 \text{ et } \xi^k = 0 \text{ pour } (i,j,k) \in I \times J \times K \right\}\ .$$

Ainsi le cas où la valeur terminale de la variable d'état n'est pas contrainte est obtenu pour $I = J = K = \emptyset$.

Remarque 2.1.1 Soit $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et considérons le critère avec coût terminal :

$$\tilde{\varphi}(x) \;:=\; \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt + G\left(x(t_1)\right) \;,$$

ainsi que le problème de minimisation

$$\tilde{\phi} \;:=\; \inf_{\substack{x \in C^1\left([t_0,t_1], \mathbb{R}^n\right) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) - x_1 \in C(I,J,K)}} \tilde{\varphi}(x) \;. \tag{2.1.2}$$

Alors, en introduisant

$$\tilde{F}(t,\xi,v) \;:=\; F\left(t,\xi,v\right) + DG\left(\xi\right) \cdot v \;,$$

On peut écrire $\tilde{\varphi}$ sous la forme

$$\tilde{\varphi}(x) \;:=\; \int_{t_0}^{t_1} \tilde{F}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt + G\left(x(t_0)\right) \;,$$

ramenant ainsi l'étude du problème (2.1.2) à celle du problème (2.1.1) sans coût terminal.

2.2 Condition nécessaire d'optimalité : cas où l'état terminal est contraint à l'égalité

Théorème 2.2.1 (équation d'Euler locale) *Soit* $x^* \in C^1\left([t_0,t_1], \mathbb{R}^n\right)$ *une solution du problème* (2.1.1)*. Alors, la fonction*

$$t \;\longmapsto\; F_v\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)$$

est de classe C^1 *sur* $[t_0,t_1]$ *et sa différentielle est donnée par*

$$\frac{d}{dt} F_v\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \;=\; F_x\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \quad \textit{pour tout} \quad t \in [t_0,t_1] \;.$$

Remarque 2.2.1 L'équation d'Euler locale est une condition nécessaire d'optimalité. Elle ne stipule pas l'existence d'une solution au problème de calcul des variations (2.1.1).

Démonstration. Soit $h \in C^1([t_0,t_1], I\!R^n)$ telle que $h(t_0) = h(t_1) = 0$, et ε un paramètre réel. On considère la petite variation de x^* dans la direction h :

$$x^\varepsilon \quad := \quad x^* + \varepsilon h \ .$$

Comme $x^\varepsilon \in C^1([t_0,t_1], I\!R^n)$ et $x^\varepsilon(t_0) = x_0$, $x^\varepsilon(t_1) = x_1$, il découle de l'optimalité de x^* que $\varepsilon = 0$ est un point de minimum de la fonction $\varepsilon \longmapsto J(x^\varepsilon)$. Il est facile de vérifier que cette fonction est dérivable par rapport à ε (dérivation sous le signe intégrale, par un argument de convergence dominée). Une condition nécessaire de cette condition de minimalité est alors la nullité de la dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} J(x^\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^*(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}^*(t) + \varepsilon\dot{h}(t)\right) dt\Big|_{\varepsilon=0} \quad = \quad 0 \ .$$

Ceci conduit à

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \cdot h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} F_v\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \cdot \dot{h}(t)dt = 0 \ . \qquad (2.2.1)$$

On introduit la primitive H de la fonction $t \longmapsto F_x\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)$

$$H(t) \quad := \quad \int_{t_0}^{t} F_x\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) dt \ + \ K \ ,$$

où est telle que

$$\int_{t_0}^{t_1} H(t)dt \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} F_v\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) dt \qquad (2.2.2)$$

En intégrant par parties la première intégrale de (2.2.1) et en se rappelant que $h(t_0) = h(t_1) = 0$, on obtient

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{-H(t) + F_v\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)\right\} \cdot \dot{h}(t)dt \quad = \quad 0 \ . \qquad (2.2.3)$$

Observons à présent que la fonction

$$h(t) \quad := \quad \int_{t_0}^{t} \{-H(s) + F_v\,(s, x^*(s), \dot{x}^*(s))\}\, ds$$

est de classe $C^1\,([t_0, t_1], I\!R^n)$ et qu'elle vérifie $h(t_0) = h(t_1) = 0$ en vertu de (2.2.2). On peut alors substituer cette fonction dans (2.2.3). Ceci permet d'obtenir :

$$\int_{t_0}^{t_1} |-H(t) + F_v\,(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))|^2\, dt \quad = \quad 0\ ,$$

ce qui donne, par continuité des fonction H, F_v et $\dot{x}^*$:

$$H(t) \;=\; F_v\,(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1]\ .$$

Pour finir la démonstration, il suffit de remarquer que H est de classe C^1, d'aprés sa définition, et de dériver cette relation. □

Remarque 2.2.2 Dans le cas du problème de calcul de variation avec coût terminal (2.1.2) introduit dans la remarque 2.1.1, la condition d'Euler locale sécrit :

$$\frac{d}{dt}\tilde{F}_v\,(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \;=\; \tilde{F}_x\,(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1]\ ,$$

soit, en se rappelant que $\tilde{F}(t, \xi, v) = F(t, \xi, v) + G'(\xi) \cdot v$,

$$\frac{d}{dt}F_v\,(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \;=\; F_x\,(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1]\ .$$

Ainsi la condition d'Euler locale pour le problème (2.1.2) ne fait pas intervenir la fonction de coût terminal G.

L'équation d'Euler énoncée dans le dernier théorème peut être étendue au cas où le problème de maximisation est posé initialement sur l'ensemble plus large des fonctions C^1 par morceaux.

Définition 2.2.1 *Soit* $x \; : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$*. On dit que* x *est continuement différentiable par morceaux, et on note* $x \in C^1_{\mathrm{pm}}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$*, s'il existe une partition* $t_0 = s_0 < \ldots < s_m = t_1$ *de l'intervalle* $[t_0, t_1]$ *telle que*

- $x \in C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$*,*
- $x \in C^1(]s_{i-1}, s_i[, \mathbb{R}^n)$ *pour tout* $i = 1, \ldots, m$*,*
- $\dot{x}$ *admet des limites à droite et à gauche finies en* s_i *pour tout* $i = 0, \ldots, m$*.*

Voici un cas où il est naturel d'étendre le problème à l'ensemble des fonctions de $C^1_{\mathrm{pm}}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.2.1 On considère le problème de minimisation :

$$\phi \; := \inf_{\substack{x(-1)=0 \\ x(1)=1}} \varphi(x) \;\; \text{où } \varphi(x) \; := \int_{-1}^{1} x(t)^2 [1 - \dot{x}(t)]^2 dt \; .$$

On remarque qu'il existe une solution de ce problème dans $C^1_{\mathrm{pm}}([-1, 1], \mathbb{R})$ donnée par

$$x^*(t) \; := \; t^+ \; = \; \max\{0, t\} \quad \text{pour tout} \quad t \in [-1, 1] \; .$$

Ainsi, la fonction valeur du problème de minimisation défini sur $C^1_{\mathrm{pm}}([-1, 1], \mathbb{R})$ est nulle. Par ailleurs, il est facile de construire une suite x_n dans $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ telle que $\varphi(x_n) \longrightarrow 0$. Ceci montre que la fonction valeur du problème de minimisation défini sur $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ est également nulle. Cependant, le problème n'admet pas de solution dans $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$.

On introduit alors le problème

$$\phi_{\mathrm{pm}} \; := \inf_{\substack{x \in C^1_{\mathrm{pm}}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1}} \varphi(x) \qquad (2.2.4)$$

où

$$\varphi(x) \; := \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) \, dt \; .$$

En regardant de près la démonstration précédente, on déduit l'extension suivante de l'équation d'Euler.

Théorème 2.2.2 (équation d'Euler intégrale) *Soit* $x^* \in C^1_{\mathrm{pm}}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ *une solution du problème* (2.2.4). *Alors, il existe une constante* $K \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$F_v\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right) \;=\; \int_{t_0}^{t_1} F_x\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right)dt \;+\; K\;.$$

En particulier, on a les deux propriétés suivantes
(i) *en tout point* $\bar{t}$ *où la fonction* $t \longmapsto F_x\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right)$ *est continue, l'équation d'Euler locale est satisfaite :*

$$\frac{d}{dt}F_v\left(\bar{t},x^*(\bar{t}),\dot{x}^*(\bar{t})\right) \;=\; F_x\left(\bar{t},x^*(\bar{t}),\dot{x}^*(\bar{t})\right)\;,$$

(ii) *bien que* $\dot{x}^*(s_i^-) \neq \dot{x}^*(s_i^+)$ *en un nombre fini de points* $(s_i)_{0\le i\le m}$ *de l'intervalle* $[t_0,t_1]$, *on a :*

$$F_v\Big(s_i,x^*(s_i),\dot{x}^*(s_i^-)\Big) \;=\; F_v\Big(s_i,x^*(s_i),\dot{x}^*(s_i^+)\Big)$$

2.3 Cas où l'état terminal n'est pas contraint à l'égalité : conditions de transversalité

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème de calcul des variations quand l'état du système à la date terminale n'est pas nécessairement contraint à l'égalité. Soient alors

$$I,\; J \text{ et } K \;\subset\; \{1,\ldots,n\}$$

des ensembles d'indices deux à deux disjoints. Remarquons immédiatement que la réunion $I \cup J \cup K$ peut être strictement incluse dans $\{1,\ldots,n\}$. On notera par $(I \cup J \cup K)^c$ le complémentaire de $I \cup J \cup K$ dans l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$.

Etant donné un point x_1 de $\mathbb{R}^n$, on considère le problème

$$\phi \quad := \inf_{\substack{x \in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) \\ x(t_0)=x_0 \\ x^i(t_1) \le x_1^i,\ i \in I \\ x^j(t_1) \ge x_1^j,\ j \in J \\ x^k(t_1) = x_1^k,\ k \in K}} \varphi(x) \tag{2.3.1}$$

où

$$\varphi(x) \ := \ \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt \ .$$

Ainsi la valeur terminale de l'état du système est

- contrainte à l'inégalité pour les composantes à indice dans I ou dans J,
- contrainte à l'égalité pour les composantes $k \in K$,
- non contrainte pour les composantes $k \in (I \cup J \cup K)^c$.

Enfin, étant donné une fonction x vérifiant les contraintes du problème (2.3.1), il convient de distinguer parmi les contraintes d'inégalité celle qui sont saturées :

$$\begin{aligned} I(x) &:= \left\{ i \in I \ : \ x^i(t_1) = x_1^i \right\} \\ J(x) &:= \left\{ j \in J \ : \ x^j(t_1) = x_1^j \right\}_; , \end{aligned}$$

et on notera

$$L(x) \ := \ [I(x) \cup J(x) \cup K]^c \ .$$

Théorème 2.3.1 *Soit $x^* \in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ une solution du problème* (2.3.1). *Alors :*

(i) (équation d'Euler locale) *la fonction $t \longmapsto F_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$ est de classe C^1 sur $[t_0,t_1]$ et sa différentielle est donnée par*

$$\frac{d}{dt} F_v\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \ = \ F_x\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) \quad \textit{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1] \ ,$$

(ii) (conditions de transversalité) *pour tous $i \in I(x^*)$, $j \in J(x^*)$ et $\ell \in L(x^*)$,*

$$F_{v^i}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) \ \le \ 0, \ \ F_{v^j}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) \ \ge \ 0$$
$$F_{v^\ell}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) \ = \ 0 \ .$$

Démonstration. Nous commençons par remarquer que x^* est aussi solution du problème de calcul des variation avec contrainte d'égalité sur la valeur terminale de l'état du système :

$$\inf_{\substack{x \in C^1([t_0,t_1], I\!R^n) \\ x(t_0)=x_0 \\ x(t_1)=x^*(t_1)}} \varphi(x) \ .$$

Ceci permet d'obtenir la partie (i) du théorème par application directe du théorème 2.2.1.

Pour montrer que x^* vérifie les conditions de transversalité, on se donne des réels $(\lambda_i)_{i\in I(x^*)}$, $(\mu_j)_{j\in J(x^*)}$ et $(\gamma_\ell)_{\ell\in L(x^*)}$ tels que

$$\lambda_i \ \geq \ 0, \ \ \mu_j \ \geq \ 0, \ \ \gamma_\ell \in I\!R \ \ \text{pour tous} \ \ i \in I(x^*), \ j \in J(x^*) \text{ et } \ell \in L(x^*) \ .$$

Soit h une fonction de $C^1([t_0,t_1], I\!R^n)$ telle que $h(t_0)=0$,

$$\begin{array}{c} h^i(t_1) = -\lambda_i, \ h^j(t_1) = \mu_j, \ h^k(t_1) = 0 \text{ et } h^\ell(t_1) = \gamma_\ell \\ \text{pour tous} \ \ i \in I(x^*), \ j \in J(x^*), \ k \in K \text{ et } \ell \in L(x^*) \ . \end{array} \tag{2.3.2}$$

Alors, il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0,\bar{\varepsilon}]$, la fonction $x^\varepsilon := x^* + \varepsilon h$ vérifie toutes les contraintes du problème (2.3.1). On en déduite que la fonction $\varepsilon \longmapsto J(x^\varepsilon)$, définie sur $[0,\bar{\varepsilon}]$, est minimisée par $\varepsilon = 0$, et par suite :

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\varphi(x^\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} \ \geq \ 0 \ . \tag{2.3.3}$$

En dérivant à l'intérieur du signe intégral comme dans la démonstration du théorème 2.2.1, on obtient alors :

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right)\cdot h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} F_v\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right)\cdot \dot{h}(t)dt \ \geq \ 0 \tag{2.3.4}$$

D'après la partie (i) du théorème, la fonction $t \longmapsto F_v\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right)$ est de classe C^1. On obtient alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_x\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right) - \frac{d}{dt}F_v\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right) \right\} \cdot h(t)dt \\ & + \left[F_v\left(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\right)\cdot h(t)\right]_{t_0}^{t_1} \ . \end{aligned}$$

Comme x^* vérifie l'équation d'Euler locale, encore d'après le (i), on about à :

$$0 \quad \leq \quad F_v\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) \cdot h(t_1)$$

puisque $h(t_0) = 0$. Enfin, en utilisant (2.3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i F_{v^i}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) \\ & + \sum_{j \in J(x^*)} \mu_j F_{v^j}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) \\ & + \sum_{\ell \in L(x^*)} \gamma_\ell F_{v^\ell}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) \ , \end{aligned}$$

et les conditions de transversalité du (ii) découle du caractère arbitraire des $\lambda_i \geq 0$, $\mu_j \geq 0$ et $\gamma_\ell \in \mathbb{R}$. □

Remarque 2.3.1 *Cas d'un problème de maximisation.* Dans le cas d'un problème de maximisation, i.e. l'infimum (2.3.1) est remplacé par un suprémum, l'inégalité (2.3.3) est inversée. Par conséquent, **toutes les inégalités dans les conditions de transversalité sont inversées.**

Remarque 2.3.2 Revenons au cas où la fonction objectif contient un terme de coût terminal comme dans la remarque 2.1.1 :

$$\inf_{\substack{x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \\ x(t_0) = x_0 \\ x^i(t_1) \leq x_1^i, \ i \in I \\ x^j(t_1) \geq x_1^j, \ j \in J \\ x^k(t_1) = x_1^k, \ k \in K}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt + G\left(x(t_1)\right) \ , \qquad (2.3.5)$$

et écrivons les conclusions du théorème 2.3.1 en fonction des fonctions F et G.

(i) L'équation d'Euler locale ne fait pas intervenir G, comme il a déja été observé dans la remarque 2.2.2.

(ii) Les conditions de transversalité sécrivent :

$$\begin{array}{rcll} F_{v^i}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) + G_{x^i}\left(x^*(t_1)\right) & \leq & 0 & \text{pour} \quad i \in I(x^*)\ , \\ F_{v^j}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) + G_{x^j}\left(x^*(t_1)\right) & \geq & 0 & \text{pour} \quad j \in J(x^*)\ , \\ F_{v^\ell}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)\right) + G_{x^\ell}\left(x^*(t_1)\right) & = & 0 & \text{pour} \quad \ell \in L(x^*)\ . \end{array}$$

2.4 Une condition suffisante d'optimalité

Dans ce paragraphe, on considère le problème de calcul de variations général :

$$\phi \quad := \quad \inf_{\substack{x \in C^1([t_0,t_1], I\!R^n) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) - x_1 \in C(I,J,K)}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt \qquad (2.4.1)$$

où F est de classe C^1, et I, J sont des sous-ensembles d'indices de $\{1, \ldots, n\}$ comme dans le paragraphe précédent. on notera comme d'habitude

$$\varphi(x) \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt\ .$$

Théorème 2.4.1 *Supposons que la fonction* $(\xi, v) \longmapsto F(t, \xi, v)$ *est convexe pour tout* $t \in [t_0, t_1]$. *Soit* $\bar{x}$ *une fonction de* $C^1([t_0,t_1], I\!R^n)$ *vérifiant les contraintes du problème* (2.4.1)*, l'équation d'Euler locale, ainsi que les conditions de transversalité correspondantes. Alors* $\bar{x}$ *est une solution du problème* (2.4.1)*.*

Démonstration. Soit $x \in C^1([t_0,t_1], I\!R^n)$ une fonction vérifiant les contraintes du problème (2.4.1), et montrons que $\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \geq 0$.
1. En utilisant la convexité de $F(t, \cdot, \cdot)$, puis l'équation d'Euler locale vérifiée par $\hat{x}$, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) - F\left(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)\right) \\ \geq & F_x\left(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)\right) \cdot [x(t) - \bar{x}(t)] \\ & + F_v\left(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)\right) \cdot [\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)] \\ = & \dfrac{d}{dt}\left\{F_v\left(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)\right) \cdot [x(t) - \bar{x}(t)]\right\}\ . \end{array}$$

En intégrant entre t_0 et t_1, ceci montre que :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) &\geq \left[F_v\left(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)\right) \cdot (x(t) - \bar{x}(t))\right]_{t_0}^{t_1} \\ &= F_v\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) \cdot (x(t_1) - \bar{x}(t_1)) \ , \end{aligned}$$

puisque $x(t_0) = \bar{x}(t_0) = x_0$.

2. Remarquons maintenant que $\bar{x}^k(t_1) = x^k(t_1) = x_1^k$ pour tout $k \in K$, et que $F_{v^\ell}\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) = 0$ pour tout $\ell \in L(\bar{x})$ d'après la condition de transversalité. Ceci permet d'écrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) &\geq \sum_{i \in I(\bar{x})} F_{v^i}\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) \left(x^i(t_1) - \bar{x}^i(t_1)\right) \\ &\quad + \sum_{j \in J(\bar{x})} F_{v^j}\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) \left(x^j(t_1) - \bar{x}^j(t_1)\right) \\ &= \sum_{i \in I(\bar{x})} F_{v^i}\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) \left(x^i(t_1) - x_1^i\right) \\ &\quad + \sum_{j \in J(\bar{x})} F_{v^j}\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) \left(x^j(t_1) - x_1^j\right) \ . \end{aligned}$$

Enfin, comme x vérifie les contraintes du problème (2.4.1) et que $I(\bar{x}) \subset I$, $J(\bar{x}) \subset J$, on a $x^i(t_1) - x_1^i \leq 0$ et $x^j(t_1) - x_1^j \geq 0$ pour tous $i \in I(x)$ et $j \in J(x)$. On déduit alors des conditions de transversalité que :

$$\begin{aligned} F_{v^i}\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) \left(x^i(t_1) - x_1^i\right) &\geq 0 \quad \text{pour tout} \quad i \in I(\bar{x}) \ , \\ F_{v^j}\left(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)\right) \left(x^j(t_1) - x_1^j\right) &\geq 0 \quad \text{pour tout} \quad j \in J(\bar{x}) \ , \end{aligned}$$

et par suite, on obtient l'inégalité voulue $\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \geq 0$. $\square$

2.5 Exemples

2.5.1 Problème quadratique unidimensionnel

On considère le problème

$$\inf_{\substack{x \in C^1([0,1], \mathbb{R}) \\ x(0) = 1}} \int_0^1 \left[x(t)^2 + \dot{x}(t)^2\right] dt \ .$$

On a alors $F(t,\xi,v) = \xi^2+v^2$, $F_x(t,\xi,v) = 2\xi$, $F_v(t,\xi,v) = 2v$, et la condition d'Euler locale s'écrit :

$$\ddot{x}(t) \;=\; x(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,1] \; .$$

On obtient alors l'expression de x en fonction de deux constantes réelles α et β :

$$x(t) \;=\; \alpha e^t + \beta e^{-t} \; .$$

Comme l'état terminal n'est pas contraint, on a la condition de transversalité :

$$F_v\left(1, x(1)\dot{x}(1)\right) \;=\; 2\,\dot{x}(1) \;=\; 0 \; .$$

En combinant cette équation avec la condition initiale $x(0) = 1$, on détermine les constantes :

$$\alpha \;=\; \frac{e^{-1}}{e+e^{-1}} \quad \text{et} \quad \beta \;=\; \frac{e}{e+e^{-1}} \; .$$

Enfin, on remarque que l'on est dans le cadre d'application du théorème 2.4.1. On est alors assuré que x est une solution de notre problème, c'est d'ailleurs la solution unique par stricte convexité de $F(t,x,v)$ en (x,v).

2.5.2 Modèle de consommation optimale

On considère la version temps continu du problème de consommation optimal étudié dans le paragraphe (1.2) de l'introduction. La dynamique de la richesse est maintenant définie par :

$$\dot{x}(t) \;=\; -c(t) \quad \text{et} \quad x(0) \;=\; x_0 \; , \tag{2.5.1}$$

où $c(t)$ est un taux de consommation à la date t. Les préférences de l'agent sont caractérisées par la fonction d'utilité :

$$U(c) \;=\; \int_0^T e^{-\beta t} u\left(c(t)\right)\, dt$$

où

$$\begin{array}{rccc} u \; : & I\!\!R_+ & \longrightarrow & I\!\!R \\ & \xi & \longrightarrow & u(\xi) \end{array}$$

est une fonction croissante, strictement concave et vérifiant la condition d'Inada

$$u'(0+) \;=\; +\infty \;, \tag{2.5.2}$$

qui, comme on l'a montré dans la remarque 1.2.1, permet d'ignorer la contrainte de positivité de la consommation. D'après (2.5.1), la version temps continu du problème de choix optimal de consommation s'écrit :

$$\sup_{\substack{x \in C^1([0,1], I\!\!R) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) \geq 0}} \int_0^T e^{-\beta t} u\left(-\dot{x}(t)\right) \, dt \; .$$

Dans cet exemple, on a $F(t, x, v) = e^{-\beta t}u(-v)$. La condition d'Euler locale s'écrit :

$$0 \;=\; -\frac{d}{dt}\left\{e^{-\beta t}u'\left(-\dot{x}\right)\right\} \;=\; e^{-\beta t}\left[-\beta u'\left(-\dot{x}\right) - u"\left(-\dot{x}\right)\ddot{x}(t)\right] \; .$$

Il est clair que la contrainte de positivité sur la richesse terminale doit être saturée par tout plan de consommation optimal. Par conséquent, il n'y a pas de condition de transversalité.

Afin d'aller plus loin dans les calculs, on suppose que

$$u(\xi) \;=\; \frac{\xi^\gamma}{\gamma}$$

où $\gamma < 1$ est un paramètre donnée. La condition locale d'Euler devient alors :

$$-\beta\left(-\dot{x}\right)^{\gamma-1} + (1-\gamma)\left(-\dot{x}\right)^{\gamma-2}\ddot{x}(t) \;=\; 0 \;,$$

soit, en multipliant par $\left(-\dot{x}\right)^{-\gamma+2}$:

$$(1-\gamma)\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) \;=\; 0 \; .$$

Compte tenu de la condition initiale $x(0) = x_0$ et de la contrainte terminale saturée $x(T) = 0$, cette équation différentielle admet comme solution unique :

$$x(t) \;=\; x_0 \left[1 - \frac{1 - e^{-\beta t/(1-\gamma)}}{1 - e^{-\beta T/(1-\gamma)}}\right] \;.$$

Enfin, on remarque que l'on est dans le cadre d'application du théorème 2.4.1. On est alors assuré que x est une solution de notre problème, c'est d'ailleurs la solution unique par stricte concavité de u.

2.5.3 Croissance optimale avec ressource épuisable

Nous allons maintenant étudier un modèle un peu plus riche que celui de l'exemple précédent, dans le sens où il sera possible de faire fructifier le capital qui sera noté k dans l'exemple actuel. La dynamique du caiptal est décrite par l'équation :

$$\dot{k} \;=\; ak(t)^{1-\alpha} r(t)^{\alpha} - c(t) \;, \tag{2.5.3}$$

où $c(t)$ désigne le taux de consommation à la date t, et $r(t)$ un taux de ressource, indispensable pour la production de capital, et puisé dans un stock de ressource $y(t)$ dont la dynamique est :

$$\dot{y} \;=\; -r(t) \;. \tag{2.5.4}$$

On notera par $x := (y, k)$ la variable d'état contrôlé du système. La variable de contrôle (c, r) prend ses valeurs dans $U = I\!R^2_+$. On considère alors le problème d'optimisation dynamique

$$\sup_{\substack{(c,r)\in\mathcal{U}\\ x(0)=x_0\\ x(T)=0}} \int_0^T \ln c(t)dt \;.$$

Remarquons immédiatement que la contrainte de positivité sur les contrôles peut être ignorée par définition de la fonction objectif et de la condition terminale. Pour se ramener à un problème de calcul de variations, il suffit de remplacer les contrôles $c(t)$ et $r(t)$ en fonction des variables d'état (y, k) et leur vitesse $(\dot{y}, \dot{k})$:

$$c(t) \quad = \quad h(t, y(t), k(t), \dot{y}(t), \dot{k}(t)) \ . \tag{2.5.5}$$

et on écrit le problème sous la forme

$$\sup_{\substack{(c,r)\in\mathcal{U} \\ x(0)=x_0 \\ x(T)=0}} \int_0^T \ln \Big[ak(t)^{1-\alpha}\left(-\dot{y}(t)\right)^{\alpha} - \dot{k}(t)\Big] dt \ .$$

Ainsi, dans cet exemple $F(t, x, v) = \ln h(t, x, v)$ avec

$$h(t, x_1, x_2, v_1, v_2) \ := \ a x_2^{1-\alpha}(-v_1)^{\alpha} - v_2 \ .$$

si bien que

La condition d'Euler locale s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -c(t)^{-1} a\alpha z(t)^{\alpha-1} \\ -c(t)^{-1} \end{pmatrix} \ = \ c(t)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ a(1-\alpha)z(t)^{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad z(t) \ := \ \frac{-\dot{y}(t)}{k(t)} \ .$$

La première équation de ce système montre que

$$c(t)^{-1} z(t)^{\alpha-1} \ = \ b_1 \qquad \text{est une fonction constante.} \tag{2.5.6}$$

En injectant cette information dans la deuxième équation, on voit que :

$$z(t)^{-1-\alpha}\dot{z}(t) \ = \ -a \ ,$$

ce qui conduit à l'existence d'une autre constante b_2 telle que

$$a z(t)^{\alpha} \ = \ \frac{1}{b_2 + \alpha t} \ .$$

En combinant cette équation avec (2.5.5) et (2.5.6), on obtient une équation différentielle pour la variable k :

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) \ &= \ a z(t)^{\alpha} k(t) - c(t) \\ &= \ (b_2 + \alpha t)^{-1} k(t) - b_1 a^{(1-\alpha)/\alpha}(b_2 + \alpha t)^{(1-\alpha)/\alpha} \ , \end{aligned}$$

Cette équation se résout explicitement. Tenant compte de la contrainte $k(T) = 0$, on obtient l'expression de $k(t)$ (à deux constantes près) :

$$k(t) \;=\; b_1 a^{(1-\alpha)/\alpha}(b_2 + \alpha t)^{1/\alpha} \ln \left(\frac{b_2 + \alpha T}{b_2 + \alpha t} \right)^{1/\alpha} .$$

On peut maintenant déterminer la variable d'état y :

$$\dot{y}^*(t) \;=\; -z(t)k(t) \;=\; -\frac{b_1}{a} \ln \left(\frac{b_2 + \alpha T}{b_2 + \alpha t} \right)^{1/\alpha} .$$

Compte tenu de la contrainte terminale $y(T) = 0$, on obtient l'expression de y, toujours aux deux constantes près :

$$y(t) \;=\; \frac{b_1}{a} \int_t^T \ln \left(\frac{b_2 + \alpha T}{b_2 + \alpha t} \right)^{1/\alpha} dt .$$

Enfin, pour déterminer les constantes b_1 et b_2, il ne reste plus qu'à écrire que :

$$k(0) \;=\; k_0 \quad \text{et} \quad y(0) \;=\; y_0 .$$

Chapter 3

Principe du maximum de Pontryagin

3.1 formulation de Lagrange du problème

Dans ce chapitre, nous étudions une classe plus grande de problèmes de contrôle dynamique. On considèrera un système dynamique dont l'évolution est régie par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) \;=\; f\left(t, x(t), u(t)\right) \quad \text{pour} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \;, \tag{3.1.1}$$

appelée *équation d'état*. Ici, $u(.)$ est une fonction de $[t_0, t_1]$ dans $U \subset I\!R^k$. C'est la variable de *contrôle* sur le système. Pour des raisons techniques liées essentiellement au problème d'existence du chapitre 5, la variable de contrôle sera supposée continue par morceaux. On notera par

$$\mathcal{U} \;:=\; C^0_{\text{pm}}\left[t_0, t_1], U\right)$$

l'ensemble des variables de contrôle admissibles.

Dans le paragraphe 3.3, nous montrerons que pour toute variable de contrôle $u \in \mathcal{U}$ et pour toute condition initiale donnée $x(t_0) = x_0$, il existe une solution unique $x(.) = x^u(.)$ de l'équation (3.1.1), appelée *état contrôlé du système*, ou *trajectoire contrôlée du système*.

Etant donnée une fonction de coût $F : [t_0, t_1] \times I\!R^n \times U \longrightarrow I\!R$, on définit le problème de minimisation :

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x^u(t_0) = x_0}} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^u(t), u(t)) \; dt \;, \tag{3.1.2}$$

où $x_0 \in I\!R^n$ est une condition initiale donnée.

La dépendance de la variable d'état x^u par rapport à la variable de contrôle u sera souvent omise, et on notera plus simplement x, sauf s'il y a un risque de confusion.

Remarquons enfin que le problème de calcul des variations étudié dans le chapitre 2 est un cas très particulier du problème de ce chapitre, qui correspond à la spécification $f(t, \xi, u) = u$.

3.2 Formulations équivalentes

La formulation (3.1.2) du paragraphe précédent est appelée *problème de Lagrange*. Dans ce paragraphe, nous présentons deux formulations alternatives, et on montrera que les trois formulations sont équivalentes dans le sens où on peut toujours se ramener de l'une à l'autre.

Formulation de Mayer. Ici le critère à minimiser dépend uniquement de la valeur terminale de l'état contrôlé du système. Pour une fonction $G : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ donnée, on définit le problème d'optimisation dynamique :

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x^u(t_0) = x_0}} G(x^u(t_1)) \;. \tag{3.2.1}$$

Si G est de classe C^1, on remarque que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} G(x^u(t_1)) &= G(x^u(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} DG(x^u(t_1)) \cdot \dot{x}^u(t) \, dt \\ &= G(x_0) + \int_{t_0}^{t_1} DG(x^u(t_1)) \cdot f(t, x^u(t), u(t)) \; dt \;, \end{aligned}$$

compte tenu de l'équation différentielle qui régit l'évolution du système contrôlé. Ainsi, en introduisant

$$F(t,\xi,\nu) \ := \ DG(\xi)\cdot f(t,\xi,\nu),$$

on peut ré-écrire le problème de Mayer sous la formulation de Lagrange.

Réciproquement, on peut écrire un problème de Lagrange sous la formulation de Mayer en augmentant le nombre de varaibles d'état :

$$y^u(t) \ := \ \begin{pmatrix} x^u(t) \\ x^u_{n+1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x^u_{n+1}(t) \ := \ \int_{t_0}^{t} F\left(t, x^u(t), u(t)\right)\, dt\ .$$

Le système d'état augmenté est ainsi régi par l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) \ = \ g\left(t, y(t), u(t)\right) \quad \text{avec} \quad g(t,\xi,\zeta,\nu) \ := \ \begin{pmatrix} f(t,\xi,\nu) \\ F(t,\xi,\nu) \end{pmatrix}\ ,$$

et le problème de Lagrange se ré-écrit sous la forme

$$\inf_{\substack{u\,\in\,\mathcal{U} \\ y^u(t_0)=(x_0,0)}} \quad y^u_{n+1}(t_1)\ ,$$

et on retrouve bien un problème de Mayer.

Formulation de Bolza. Cette formulation regroupe les deux précédentes. Etant données deux fonctions $F : [t_0,t_1]\times I\!\!R^n \times U \longrightarrow I\!\!R$ et $G : I\!\!R^n \longrightarrow I\!\!R$, on définit le problème d'optimisation dynamique :

$$\inf_{\substack{u\,\in\,\mathcal{U} \\ x^u(t_0)=x_0}} \quad \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^u(t), u(t)\right)\, dt \ + \ G\left(x^u(t_1)\right)\ . \tag{3.2.2}$$

Le problème de Lagrange rentre ainsi dans la classe des problèmes de Bolza ($G=0$). Réciproquement, en introduisant

$$\tilde{F}(t,\xi,\nu) \ := \ \tilde{F}(t,\xi,\nu) + DG(\xi)\cdot f(t,\xi,\nu)\ ,$$

on ramème le problème de Bolza à un problème de Lagrange.

3.3 Equation différentielle contrôlée : Existence et unicité

Commençons par préciser la notion de continuité par morceaux.

Définition 3.3.1 *Une fonction $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est continue par morceaux si*

- u admet des limites à droite et à gauche en tout point de $]t_0, t_1[$, une limite à droite en t_0, et une limite à gauche en t_1,

- l'ensemble des points de $]t_0, t_1[$ où u n'est pas continue est fini.

Dans la suite de ce paragraphe, on se donne une fonction $u \in \mathcal{U}$, et on considère l'équation différentielle (3.1.1) où f est une fonction continue. Afin d'éviter le problème de non dérivabilité de x aux points de discontinuité de u, on écrira (3.1.1) sous la forme intégrale

$$x(t) \;=\; x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s), u(s)\right) ds\ , \quad t_0 \leq t \leq t_1\ . \tag{3.3.1}$$

Définition 3.3.2 *Soit $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et u une variable de contrôle dans $\mathcal{U}$. On dit que $x(.)$ est une solution de* (3.1.1) *avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ si x vérifie* (3.3.1).

Ainsi, une solution x de (3.1.1) est nécessairement continue. Elle est dérivable à droite et à a gauche en tout point de $[t_0, t_1]$, avec

$$\dot{x}(t-) \;=\; f\left(t, x(t), u(t-)\right) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t+) \;=\; f\left(t, x(t), u(t+)\right)\ ,$$

et par suite x est dérivable en tout point de continuité de u.

L'existence et l'unicité d'une solution de (3.1.1) (suivant la définition précédente) est assurée par le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Soit $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue vérifiant les conditions de Lipschitz et de croissance linéaires : il existe $K > 0$*

tel que

$$
\begin{aligned}
|f(t,\xi_1,\nu) - f(t,\xi_2,\nu)| \ &\leq \ K \ |\xi_1 - \xi_2| \ , \quad \xi_1, \xi_2 \in I\!R^n, \ (t,\nu) \in [t_0,t_1] \times U \ , \\
|f(t,\xi,\nu)| \ &\leq \ K \ (1 + |\xi| + |\nu|) \ , \quad (t,\xi,\nu) \in [t_0,t_1] \times I\!R^n \times U \ .
\end{aligned}
\tag{3.3.2}
$$

Alors, pour toute variable de contrôle $u \in \mathcal{U}$*, l'équation différentielle* (3.1.1) *admet une unique solution vérifiant une condition initiale donnée* $x(t_0) = x_0 \in I\!R^n$*.*

Ce résultat est un cas particulier du théorème 5.1.1 qui sera démontré dans le chapitre 5.

3.4 Enoncé du principe du maximum de Pontryagin

Dans ce paragraphe, nous énonçons la condition nécessaire d'optimalité pour le problème de contrôle (3.1.2). Pour celà, nous introduisons le *Hamiltonien* associé :

$$
H(t,\xi,\nu,\pi) \ := \ F(t,\xi,\nu) \ + \ \pi \cdot f(t,\xi,\nu) \tag{3.4.1}
$$

défini sur $[t_0,t_1] \times I\!R^n \times U \times I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$.

Théorème 3.4.1 *Supposons que* f *et* F *soient continues, qu'elles vérifient les conditions* (3.3.2)*, et que les gradients partiels* f_x *et* F_x *existent, continus, et pour un certain* $\alpha > 0$*,*

$$
\xi \longmapsto (f_x, F_x)(t,\xi,\nu) \quad \text{est } \alpha\text{−Hölderienne pour} \quad (t,\nu) \in [t_0,t_1] \times U. \tag{3.4.2}
$$

Soit u^* *un contrôle optimal pour le problème* (3.1.2)*, et* $x^* := x^{u^*}$ *l'état contrôlé associé. Alors,*

$$
\text{il existe} \quad p \ : \ [t_0,t_1] \longrightarrow I\!R^n \quad \text{de classe } C^1 \ ,
$$

telle que, pour tout $t \in [t_0,t_1]$ *:*
(i) $H\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right) = \min_{\nu \in U} H\left(t, x^*(t), \nu, p(t)\right)$,
(ii) $\dot{p}(t) = -H_x\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right)$ *et* $p(t_1) = 0$.

Remarquons que ce théorème reste vrai sans l'hypothèse (3.4.2). Nous imposons cette condition afin de simplifier la démonstration. Nous terminons ce paragraphe par le vocabulaire asocié à l'énoncé précédent.
- La fonction p introduite dans l'énoncé prédent est appelée *état adjoint du système.*
- L'équation différentielle qui régit sa dynamique est appelée *équation d'état adjoint.*
- La condition terminale sur p est appelée *condition de transversalité.*
- On a l'habitude de regrouper l'équation d'état adjoint avec l'équation d'état, définissant ainsi le *système Hamiltonien* :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x}(t) & = & \frac{\partial H}{\partial p}\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right) \ , & x(t_0) = x_0 \ , \\ \dot{p}(t) & = & -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right) \ , & p(t_1) = 0 \ . \end{array} \right. \tag{3.4.3}$$

3.5 Démonstration du principe du maximum de Pontryagin

Dans ce paragraphe, nous considérons la formulation de Mayer

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x^u(t_0) = x_0}} \quad G\left(x^u(t_1)\right) \ . \tag{3.5.1}$$

Il est bien sûr immédiat de déduire théorème 3.4.1 en utilisant l'équivalence entre les formulations de Lagrange, de Mayer et de Bolza expliquée dans le paragraphe 3.2. Le résultat simple suivant nous sera très utile.

Lemme 3.5.1 (Gronwall) *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ *une fonction continue par morceaux véfiant*

$$f(t) \ \leq \ \alpha + \beta \int_a^t f(s) ds \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a, b] \ , \tag{3.5.2}$$

$\alpha, \beta > 0$ *étant deux réels indépendants de* t. *Alors*

$$f(t) \ \leq \ \alpha e^{\beta(t-a)} \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a, b] \ .$$

Démonstration. En multipliant (3.5.2) par $e^{-\beta(t-a)}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-\beta(t-a)}\int_a^t f(s)ds\right\} \;\leq\; \alpha e^{-\beta(t-a)} \quad \text{pour tout} \quad t \in [a,b] \;,$$

ce qui donne, par une simple intégration entre a et t,

$$e^{-\beta(t-a)}\int_a^t f(s)ds \;\leq\; \frac{\alpha}{\beta}\left[1 - e^{-\beta(t-a)}\right] \quad \text{pour tout} \quad t \in [a,b] \;.$$

On réinjecte enfin cette inégalité dans (3.5.2) pour obtenir le résultat voulu.

□

Nous allons maintenant procéder à la démonstration du principe du maximum de Pontryagin dans le cas du problème de Mayer (3.5.1).

<u>Etape 1</u> : *Perturbation de la variable de contrôle.* Soit $\nu \in U$, $0 < \varepsilon < t_1 - t_0$ et $t_0 + \varepsilon < \tau \leq t_1$. On considère la variable de contrôle

$$u_\varepsilon \;:=\; \left\{\begin{array}{l} \nu \text{ sur }]\tau-\varepsilon,\tau] \\ u^* \text{ sur } [t_0,\tau-\varepsilon]\cup]\tau,t_1] \;. \end{array}\right.$$

Il est clair que $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$. On notera

$$x_\varepsilon \;:=\; x^{u_\varepsilon} \quad y_\varepsilon \;:=\; x_\varepsilon - x^* \quad \text{et} \quad z_\varepsilon \;:=\; \frac{1}{\varepsilon}\, y_\varepsilon \;.$$

<u>Etape 2</u> : *Effet de la perturbation sur l'état du système.* On a bien sûr :

$$y_\varepsilon \;=\; 0 \quad \text{sur} \quad [0,\tau-\varepsilon] \;.$$

Le résultat suivant montre que y_ε converge vers 0 uniformément sur $[t_0, t_1]$, avec un taux de convergence de ε, préparant ainsi l'analyse de z_ε.

Lemme 3.5.2 *Sous les conditions* (3.3.2) *sur f, il existe une constant c telle que :*

$$\sup_{t_0\leq t\leq t_1} |y_\varepsilon(t)| \;\leq\; \varepsilon\, e^{c(t_1-t_0)} \;.$$

Démonstration. (i) Pour $t \in\,]\tau - \varepsilon, \tau]$, on a

$$\dot{y}_\varepsilon(t) \;=\; f\left(t, x_\varepsilon(t), \nu\right) - f\left(t, x^*, u^*(t)\right) \;,$$

et par suite, d'après (3.3.2) :

$$\begin{aligned}
|y_\varepsilon(t)| \;&=\; \left|\int_{\tau-\varepsilon}^{t} \left[f\left(s, x_\varepsilon(s), \nu\right) - f\left(t, x^*(s), \nu\right)\right] ds \right.\\
&\qquad \left. + \int_{\tau-\varepsilon}^{t} \left[f\left(s, x^*(s), \nu\right) - f\left(t, x^*(s), u^*(s)\right)\right] ds\right|\\
&\leq\; K \int_{\tau-\varepsilon}^{t} |y_\varepsilon(s)| ds \;+\; \varepsilon K \left(2 + |\nu| + \|x^*\|_\infty + \|u^*\|_\infty\right)\\
&\leq\; K' \left(\varepsilon + \int_{\tau-\varepsilon}^{t} |y_\varepsilon(s)| ds\right) \;,
\end{aligned}$$

où $\|\varphi\|_\infty = \max_{[t_0,t_1]} |\varphi|$ et K' est une constante strictement positive. La fonction y_ε est continue par morceaux comme différence de deux fonctions continues par morceaux. On peut alors appliquer le lemme de Gronwall pour obtenir :

$$|y_\varepsilon(t)| \;\leq\; K'\varepsilon\, e^{K'\varepsilon(t-\tau+\varepsilon)} \;\leq\; 2K'\varepsilon \quad \text{pour} \quad t \in\,]\tau - \varepsilon, \tau] \;, \qquad (3.5.3)$$

pour ε suffisamment petit.

(ii) Pour $t \in\,]\tau, t_1]$, on a

$$\dot{y}_\varepsilon(t) \;=\; f\left(t, x_\varepsilon(t), u^*(t)\right) - f\left(t, x^*, u^*(t)\right) \;,$$

et par suite, d'après (3.3.2) :

$$\begin{aligned}
|y_\varepsilon(t)| \;&\leq\; |y_\varepsilon(\tau)| \;+\; K \int_{\tau}^{t} |y_\varepsilon(s)| ds\\
&\leq\; K' \left(2\varepsilon + \int_{\tau}^{t} |y_\varepsilon(s)| ds\right) \;,
\end{aligned}$$

d'après (3.5.3). On obtient alors par le lemme de Gronwall :

$$|y_\varepsilon(t)| \;\leq\; 2K'\varepsilon\, e^{K'(t-\tau)} \;\leq\; 2K'\varepsilon e^{K'(t_1-t_0)} \quad \text{pour} \quad t \in\,]\tau - \varepsilon, \tau] \;.(3.5.4)$$

Le résultat du lemme découle de (3.5.3) et (3.5.4). □

Nous somme maintenant en mesure d'analyser le comportement asymptotique de z_ε.

Lemme 3.5.3 *Supposons que f vérifie les conditions* (3.3.2)*, et que le gradient partiel f_x existe, est continu, et vérifie* (3.4.2)*. Alors, la fonction z_ε converge simplement sur $[t_0, t_1]$ vers la fonction z définie par :*

$$\begin{aligned} z(t) &= 0\ ;\quad t \in [0, \tau[\\ z(\tau) &= f\left(\tau, x^*(\tau), \nu\right) - f\left(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)\right) \\ \dot z(t) &= f_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\ z(t)\ ;\quad t \in [\tau, t_1[\ . \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Démonstration. (i) La convergence de $z(t)$ vers zéro pour $t < \tau$ est évidente. Nous commençons alors par étudier la limite de $z_\varepsilon(\tau)$. Pour $t \in]\tau - \varepsilon, \tau]$, on a

$$\begin{aligned} \dot y_\varepsilon(t) &= f\left(t, x_\varepsilon(t), \nu\right) - f\left(t, x^*, u^*(t)\right) \\ &= f\left(t, x^*(t), \nu\right) - f\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) + f_x\left(t, x^*(t), \nu\right)\ y^\varepsilon(t) + \varepsilon\eta_\varepsilon(t)\ , \end{aligned}$$

où $\varepsilon\eta_\varepsilon(t) = \circ\left(|y^\varepsilon(t)|\right)$. En utilisant la condition (3.4.2) sur f_x, on obtient une meilleure estimation sur η_ε. En effet, pour une certaine combinaison convexe $\bar x(t)$ de $x_\varepsilon(t)$ et $x^*(t)$, on a :

$$\begin{aligned} |\varepsilon\eta_\varepsilon| &= \left|f_x\left(t, \bar x(t), u^*(t)\right) - f_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right| \cdot |y_\varepsilon(t)| \\ &\le C\ |\bar x(t) - x^*(t)|^\alpha |y_\varepsilon(t)|\ \le\ C\ |y_\varepsilon|^{1+\alpha}\ \le\ C'\ \varepsilon^{1+\alpha}\ ,\quad \tau - \varepsilon < t \le \tau \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

d'après le lemme 3.5.2 précédent. Pour montrer la convergence de $z_\varepsilon(\tau)$ vers $z(\tau)$ (défini dans l'énoncé du lemme), on calcule

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(\tau) &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \dot z_\varepsilon(t) dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[f\left(t, x^*(t), \nu\right) - f\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right] dt \\ &\quad + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \eta_\varepsilon(t) dt + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f_x\left(t, x^*(t), \nu\right) z^\varepsilon(t) dt\ . \end{aligned}$$

D'après (3.5.6), on voit que

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \eta_\varepsilon(t) dt \ \longrightarrow\ 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \ \longrightarrow\ 0\ .$$

Par continuité de la fonction $t \longmapsto f_x\left(t, x^*(t), \nu\right) z^\varepsilon(t)$, on voit aussi que

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f_x\left(t, x^*(t), \nu\right) z^\varepsilon(t) dt \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \quad \longrightarrow \quad 0 \; .$$

Enfin, par le théorème de la moyenne :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left[f\left(t, x^*(t), \nu\right) - f\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right] dt \quad \longrightarrow \quad z(\tau) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \quad \longrightarrow \quad 0 \; .$$

(ii) Pour $t \in]\tau, t_1]$, on a

$$\begin{aligned} \dot{y}_\varepsilon(t) &= f\left(t, x_\varepsilon(t), u^*(t)\right) - f\left(t, x^*, u^*(t)\right) \\ &= f_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) \; y_\varepsilon(t) + \varepsilon\eta_\varepsilon(t) \; , \end{aligned}$$

où $\varepsilon\eta_\varepsilon(t) = \circ\left(|y^\varepsilon(t)|\right)$. En utilisant la condition (3.4.2) comme dans la première étape de cette démonstration, on obtient l'éstimation suivante pour η_ε :

$$|\eta_\varepsilon| \quad \leq \quad C' \, \varepsilon^\alpha \; , \quad \tau \geq t \leq t_1 \; . \tag{3.5.7}$$

Pour montrer la convergence de z_ε vers z sur $]\tau, t_1]$, on calcule :

$$\dot{z}_\varepsilon(t) - \dot{z}(t) \quad = \quad f_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) \left[z_\varepsilon(t) - \dot{z}(t)\right] + \eta_\varepsilon(t) \; ,$$

et par suite :

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(t) - z(t)| \quad &\leq \quad |z_\varepsilon(\tau) - z(\tau)| + \int_\tau^t |\eta_\varepsilon(s)| ds \\ &\qquad + \int_\tau^t \left|f_x\left(s, x^*(s), u^*(s)\right)\right| \cdot \left|z_\varepsilon(s) - \dot{z}(s)\right| ds \; . \end{aligned}$$

Comme f_x est continue, on voit que la quantité $f_x\left(s, x^*(s), u^*(s)\right)$ est bornée sur l'intervalle $[\tau, t_1]$. En utilisant en plus (3.5.7), on otient alors l'existence d'une constante C telle que

$$|z_\varepsilon(t) - z(t)| \quad \leq \quad |z_\varepsilon(\tau) - z(\tau)| + C\left(\varepsilon^\alpha + \int_\tau^t |z_\varepsilon(s) - \dot{z}(s)| ds\right) \; .$$

D'après le lemme de Gronwall, ceci assure que

$$|z_\varepsilon(t) - z(t)| \; \leq \; \left(|z_\varepsilon(\tau) - z(\tau)| + C\varepsilon^\alpha\right) e^{C(t-\tau)} \; , \quad \text{pour} \quad t \in [\tau, t_1] \; ,$$

ce qui montre bien la convergence simple de z_ε vers z d'après la convergence de $z_\varepsilon(\tau)$ vers $z(\tau)$ établie dans la première partie de cette démonstration.
$\square$

Etape 3 : Effet de la perturbation sur la fonction objectif. Comme x^* est supposée être une solution du problème de minimisation (3.2.1), la fonction $\varepsilon \longmapsto G\left(x_\varepsilon(t_1)\right)$ définie sur $[0, \tau - t_0]$ est minimsée pour $\varepsilon = 0$. Comme G est différentiable, on écrit la condition du premier ordre :

$$0 \ \leq \ \left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon} G\left(x_\varepsilon(t_1)\right)\right|_{\varepsilon=0} \ = \ DG\left(x^*(t_1)\right) \cdot z(t_1) \ . \qquad (3.5.8)$$

On a ainsi montré que pour tout choix de $\nu \in U$ et $\tau \in]t_0, t_1[$, l'inégalité (3.5.8) est vérifiée, où $z(.)$ est une fonction dépendant de (ν, τ) définie dans (3.5.5).

Cette condition nécessaire d'optimalité étant peu commode à exploiter, nous allons l'exprimer sous une autre forme équivalente. On introduit la fonction $p(.)$ définie par :

$$\dot{p}(t) \ = \ -f_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)^T p(t) \quad \text{et} \quad p(t_1) \ = \ DG\left(x^*(t_1)\right) \ ,$$

ou l'exposant ^{T} désigne l'opérateur de transposition. On calcule alors que, pour tout point $\tau \leq t \leq t_0$ de continuité de u^* :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[p(t) \cdot z(t)\right] \ &= \ \dot{p}(t) \cdot z(t) + p(t) \cdot z(t) \\
&= \ -f_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)^T p(t) \cdot z(t) + p(t) \cdot f_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) z(t) \\
&= \ 0 \ .
\end{aligned}$$

Comme p et z sont continues, ceci montre que la fonction $t \longmapsto p(t) \cdot z(t)$ est constante sur $[\tau, t_1]$, et par suite $p(t_1) \cdot z(t_1) = p(\tau) \cdot z(\tau)$. D'après l'expression de $z(\tau)$ dans (3.5.5) et la condition (3.5.8), on obtient alors :

$$p(\tau) \cdot f\left(\tau, x^*(\tau), \nu\right) \ \geq \ p(\tau) \cdot f\left(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)\right)$$

pour tous $\tau \in]t_0, t_1[$ et $\nu \in U$, terminant la démonstration du théorème 3.4.1.
$\square$

Etape 4 : Retour à la formulation de Lagrange. Nous allons maintenant appliquer le résultat obtenu dans l'étape précédente au problème de Mayer

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ y^u(t_0) - y_0 = 0}} G\left(y(t_1)\right) ,$$

où y est l'état du système augmenté

$$y := \begin{pmatrix} x \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad y^{n+1}(t) := \int_{t_0}^{t} F\left(t, x^u(t), u(t)\right)\, dt .$$

La dynamique du système contrôlé y est régie par l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) = g\left(t, y(t), u(t)\right) \quad \text{où} \quad g(t, \xi, \zeta, \nu) := \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix} (t, \xi, \nu)$$

pour tout $(t, \xi, \zeta, \nu) \in [t_0, t_1] \times I\!R^n \times I\!R \times U$. Enfin, la fonction objectif est définie par

$$G(\xi, \zeta) = \zeta \quad \text{pour tout} \quad (\xi, \zeta) \in I\!R^n \times I\!R .$$

On note par $q(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ p_0(t) \end{pmatrix} \in I\!R^n \times I\!R$ l'état adjoint du système défini par l'équation différentielle adjointe et la condition de transversalité :

$$\dot{q}(t) = -g_y^T\left(t, y^*(t), u^*(t)\right) , \qquad q(t_1) = DG\left(y^*(t_1)\right) .$$

Le principe du maximum de Pontryagin pour le problème de Mayer ci-dessus obtenu dans l'étape précédente assure que

$$q(t) \cdot g\left(t, y^*(t), u^*(t)\right) = \min_{\nu \in U} q(t) \cdot g\left(t, y^*(t), \nu\right) \quad \text{pour} \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.5.9}$$

D'après l'expression de g et de G, on obtient par un calcul direct $\dot{p}_0(t) = 0$, soit

$$p_0(t) = 1 \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1] ,$$

et

$$\dot{p}(t) \;=\; F_x\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) + p(t)\cdot f_x^T\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\;, \qquad p(t_1) \;=\; 0\;.$$

Enfin, la condition (3.5.9) sécrit :

$$H\left(t, y^*(t), u^*(t), p(t)\right) \;=\; \min_{\nu\in U}\; H\left(t, y^*(t), \nu, p(t)\right) \quad \text{pour tout} \quad t\in[t_0,t_1]\;,$$

où

$$H(t,\xi,\nu,\pi) \;\;:=\;\; F(t,\xi,\nu) + \pi\cdot f(t,\xi,\nu)\;.$$

3.6 Contraintes sur l'état terminal du système

Dans ce paragraphe, nus considérons un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état terminal du système :

$$\inf_{\substack{u\,\in\,\mathcal{U}\\ x^u(t_0)-x_0=0\\ x^u(t_1)-x_1\in C(I,J,K)}} \quad \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^u(t), u(t)\right)\, dt\;, \tag{3.6.1}$$

où $x_0, x_1 \in I\!\!R^n$ sont des données du problème, I, J et K sont des sous ensembles d'indices de $\{1,\ldots,n\}$ deux à deux disjoints, et

$$C(I,J,K) \;\;:=\;\; \left\{\xi\in I\!\!R^n \;:\; \xi^i\le 0,\ \xi^j\ge 0 \text{ et } \xi^k=0 \text{ pour } (i,j,k)\in I\times J\times K\right\}\;.$$

Parmi les contraintes d'inégalité, il convient de distinguer celles qui sont saturées. On notera alors pour tout $x = x^u(.)$:

$$I(x) \;=\; \left\{i\in I \;:\; x^i(t)-x_1^i=0\right\} \quad \text{et} \quad J(x) \;=\; \left\{j\in J \;:\; x^j(t)-x_1^j=0\right\}\;.$$

Nous noterons enfin

$$L(x) \;\;:=\;\; \left[I(x)\cup J(x)\cup K\right]^c\;.$$

Afin de simplifier l'écriture, on utilise la formulation de Mayer

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ y^u(t_0) - y_0 = 0 \\ y^u(t_1) - y_1 \in D(I,J,K)}} G\left(y(t_1)\right) \ , \tag{3.6.2}$$

où y est l'état du système augmenté

$$y \ := \ \begin{pmatrix} x \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad y^{n+1}(t) \ := \ \int_{t_0}^{t} F\left(t, x^u(t), u(t)\right)\, dt \ ,$$

$y_0 := (x_0^T, 0)^T$, $y_1 := (x_1^T, 0)^T$, $G(\xi, \zeta) = \zeta$ pour tout $(\xi, \zeta) \in I\!R^n \times I\!R$, et

$$D(I,J,K) \ := \ C(I,J,K) \times I\!R \ .$$

La dynamique du système augmenté est gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) \ = \ g\left(t, y(t), u(t)\right) \quad \text{où} \quad g(t, \xi, \zeta, \nu) \ := \ \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix} (t, \xi, \nu)$$

pour tout $(t, \xi, \zeta, \nu) \in [t_0, t_1] \times I\!R^n \times I\!R \times U$.

Soient λ un vecteur de $I\!R^n$ de multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes décrites par l'ensemble $C(I,J,K)$. D'après le théorème de Kuhn et Tucker, les composantes de λ vérifient

$$\lambda_i \ \geq \ 0 \ , \quad \lambda_j \ \leq \ 0 \ , \quad \lambda_\ell \ = \ 0 \quad \text{pour} \quad i \in I, \ j \in J, \ \ell \in [I \cup J \cup K]^c , \tag{3.6.3}$$

et le problème (3.6.2) est ramené au problème de Mayer sans contraintes sur l'état terminal

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ y^u(t_0) - y_0 = 0}} L\left(y(t_1), \lambda\right) \ , \tag{3.6.4}$$

où L est le Lagrangien :

$$L\left(\xi, \lambda\right) \ := \ G(\xi) + \lambda \cdot \xi \ . \quad \text{pour tout} \quad \xi \in I\!R^{n+1} \ .$$

Nous sommes maintenant dans le cadre d'application du principe du maximum de Pontryagin énoncé dans le théorème 3.4.1 : supposons que u^* est une variable de contrôle optimale dans $\mathcal{U}$ pour le problème (3.6.4), soit $x^* := x^{u^*}$ létat du système associé, alors il existe un état adjoint $q : [t_0, t_1] \longrightarrow I\!R^n$ défini par l'équation d'état adjoint

$$\dot{q}(t) \;=\; -g_y^T\left(t, y^*(t), u^*(t)\right) \ , \tag{3.6.5}$$

ainsi que la condition de transversalité :

$$q(t_1) \;=\; L_y\left(y(t_1), \lambda\right) \ ,$$

tel que

$$q(t) \cdot g\left(t, y^*(t), u^*(t)\right) \;=\; \min_{\nu \in U} \; q(t) \cdot g\left(t, y^*(t), \nu\right) \ . \tag{3.6.6}$$

En utilisant les conditions de Kuhn et Tucker (3.6.3) sur le multiplicateur λ, on peut alors ré-écrire la condition de transversalité sous la forme :

$$\begin{aligned} q^i(t_1) \geq G_y^i\left(y^*(t_1)\right), \ p^j(t_1) \leq G_y^j\left(y^*(t_1)\right) \ \text{et} \ p^\ell(t_1) = G_y^\ell\left(y^*(t_1)\right) \\ \text{pour tous } (i, j, \ell) \in I(y^*) \times J(y^*) \times L(y^*) \ . \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

En conclusion, le principe du maximum de Pontryagin dans le problème avec contraintes sur létat terminal (3.6.2) assure l'éxistence d'un état adjoint du système, vérifiant l'équation différentielle adjointe (3.6.5) et la condition de transversalité (3.6.7), tel que (y^*, u^*, q) vérifie (3.6.6).

En retournant les changements de variables qui nous ont conduit du système x au système y, on peut maintenant énoncer le principe du maximum de Pontryagin pour le problème de Lagrange (3.6.1).

Théorème 3.6.1 *Supposons que les conditions du théorème 3.4.1 soient vérifiée. Soit u^* un contrôle optimal pour le problème* (3.6.1)*, et $x^* := x^{u^*}$ l'état contrôlé associé. Alors,*

$$\textit{il existe} \quad p \ : \ [t_0, t_1] \longrightarrow I\!R^n \quad \textit{de classe } C^1 \ ,$$

telle que pour tout $t \in [t_0, t_1]$ *:*
(i) $H\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right) = \min\limits_{\nu \in U} H\left(t, x^*(t), \nu, p(t)\right)$,
(ii) $\dot{p}(t) = -H_x\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right)$
(iii) p *vérifie les conditions de transversalité :*

$$p^i(t_1) \geq 0, \;\; p^j(t_1) \leq 0, \;\; p^\ell(t_1) = 0$$
$$\textit{pour tout } (i, j, \ell) \in I(x^*) \times J(x^*) \times L(x^*)\ .$$

Remarque 3.6.1 *Cas d'un problème de maximisation.* Dans le cas d'un problème de maximisation, i.e. l'infimum (3.6.1) est remplacé par un suprémum, **toutes les inégalités dans les conditions de transversalité sont inversées.**

3.7 Réduction heuristique à un problème de calcul des variations

Dans ce paragraphe, nous montrons de manière heuristique comment on peut retrouver le principe du maximum de Pontryagin à partir du théorème de Lagrange 1.1.6 et l'équation d'Euler locale du théorème 2.2.1. On considère alors un problème de Lagrange

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x^u(t_0) = x_0}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^u(t), u(t)\right) \, dt\ ,$$

sans contraintes sur l'état terminal, où la dynamique du système est gouvernée par l'équation d'état

$$\dot{x}(t) \;=\; f\left(t, x(t), u(t)\right) \quad \text{pour} \quad t_0 \leq t \leq t_1\ .$$

La prise en compte de contraintes sur l'état terminal ne pose pas de problème particulier.

Pour nous ramener à un problème de calcul de variations, nous allons traiter l'équation différentielle qui régit l'état du système contrôlé comme une contrainte à l'égalité dans un problème de minimisation par rapport aux variables x, $\dot{x}$, u. Ceci conduit à introduire un multiplicateur de Lagrange $p(t) \in I\!R^n$ pour chaque $t \in [t_0, t_1]$, et à définir le Lagrangien :

$$
\begin{aligned}
L(x, \dot{x}, u, p) &:= \int_{t_0}^{t_1} \left[F(t, x(t), u(t)) - p(t) \cdot \dot{x}(t) + p(t) \cdot f(t, x(t), u(t)) \right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[H(t, x(t), u(t), p(t)) - p(t) \cdot \dot{x}(t) \right] dt ,
\end{aligned}
$$

où H est le Hamiltonien du système. Etant donné le multiplicateur de Lagrange $p(.)$, on minimise le Lagrangien par rapport aux variables x, $\dot{x}$, u, qui sont maintenant non contraintes. La minimisation par rapport à la variable de contrôle u conduit à la caractérisation d'un contrôle optimal u^* tel que

$$
H^*(t, x(t), p(t)) := H(t, x(t), u^*(t), p(t)) = \min_{\nu \in U} H(t, x(t), \nu), p(t))
$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Nous sommes alors ramené au problème

$$
\min \int_{t_0}^{t_1} \left[H^*(t, x(t), p(t)) - p(t) \cdot dotx(t) \right] dt ,
$$

et on reconnait un problème de calcul de variations. L'utilisation du théorème 2.2.1 permet d'écrire la condition du premier ordre :

$$
\dot{p}(t) = -H^*_x(t, x^*(t), p(t)) ,
$$

qui n'est autre que l'équation différentielle adjointe, ainsi que la condition de transversalité :

$$
p(t_1) = 0 .
$$

3.8 Une condition suffisante d'optimalité

Dans ce paragraphe, on considère le problème d'optimisation dynamique

$$
\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x^u(t_0) - x_0 = 0 \\ x^u(t_1) - x_1 \in C(I,J,K)}} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^u(t), u(t)) \, dt , \tag{3.8.1}
$$

avec les mêmes notation que celles du paragraphe 3.6.

Théorème 3.8.1 *Soit $u^* \in \mathcal{U}$ et $x^* = x^{u^*}$ l'état contrôlé associé. Supposons que x^* vérifie les contraintes du problème* (3.8.1)*, ainsi que les conditions nécessaires du théorème 3.6.1. On suppose de plus que la fonction*

$$H^*(t, \xi, \pi) \ := \ \min_{\nu \in U} H(t, \xi, \nu, \pi)$$

est convexe en ξ pour tout $(t, \pi) \in [t_0, t_1] \times I\!R^n$. Alors la variable de contrôle u^* est solution du problème (3.8.1)*.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{U}$ et $x = x^u$ l'état du système associée avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Supposons que x vérifie les contraintes terminales $x(t_1) - x_1 \in C(I, J, K)$. Afin de montrer le théorème, nous devons vérifier que

$$\delta \ := \ \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) dt - \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), u(t)\right) dt \ \ \leq \ \ 0 \ . \quad (3.8.2)$$

Par définition du Hamiltonien du système, on a

$$\begin{aligned} \delta \ &= \ \int_{t_0}^{t_1} \left[H\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right) - H\left(t, x(t), u(t), p(t)\right)\right] \ dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} p(t) \cdot \left[f\left(t, x(t), u(t)\right) - f\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right] \ dt \ , \end{aligned}$$

où $p(t)$ est l'état adjoint du système. Comme u^* vérifie

$$H\left(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\right) \ = \ \min_{\nu \in U} H\left(t, x^*(t), \nu, p(t)\right) \ = \ H^*\left(t, x^*(t), p(t)\right) \ ,$$

on déduit de léquation d'état du système que :

$$\begin{aligned} \delta \ &= \ \int_{t_0}^{t_1} \left[H^*\left(t, x^*(t), p(t)\right) - H\left(t, x(t), u(t), p(t)\right)\right] \ dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} p(t) \cdot \left[\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)\right] \ dt \\ &\leq \ \int_{t_0}^{t_1} \left[H^*\left(t, x^*(t), p(t)\right) - H^*\left(t, x(t), p(t)\right)\right] \ dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} p(t) \cdot \left[\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)\right] \ dt \ . \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de convexité de $H^*(t,\xi,\pi)$ par rapport à ξ, qui assure que :

$$H^*\left(t,x(t),p(t)\right) \;\; \geq \;\; H^*\left(t,x^*(t),p(t)\right) + H^*_x\left(t,x^*(t),p(t)\right)\cdot\left[x(t)-x^*(t)\right] \;,$$

ainsi que l'équation différentielle adjointe qui régit la dynamique de l'état adjoint, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\delta \;\; &\leq \;\; -\int_{t_0}^{t_1} H^*_x\left(t,x^*(t),p(t)\right)\cdot\left[x(t)-x^*(t)\right]\;dt + \int_{t_0}^{t_1} p(t)\cdot\left[\dot{x}(t)-\dot{x}^*(t)\right]\;dt \\
&= \;\; \int_{t_0}^{t_1}\left[\dot{p}(t)\cdot\left(x(t)-x^*(t)\right)+p(t)\cdot\left(\dot{x}(t)-\dot{x}^*(t)\right)\right]\;dt \\
&= \;\; \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left\{p(t)\cdot\left(x(t)-x^*(t)\right)\right\}\;dt \\
&= \;\; p(t_1)\cdot\left(x(t_1)-x^*(t_1)\right)
\end{aligned}$$

puisque $x(t_0)=x^*(t_0)=x_0$. On décompose ce dernier produit scalaire afin de distinguer les contraintes saturées des autres :

$$\begin{aligned}
\delta \;\; \leq \;\; & \sum_{i\in I(x^*)} p^i(t_1)\left(x^i(t_1)-x_1^i\right) \\
& + \sum_{j\in J(x^*)} p^j(t_1)\left(x^j(t_1)-x_1^j\right) \\
& + \sum_{\ell\in L(x^*)} p^\ell(t_1)\left(x^\ell(t_1)-x^{*\ell}(t_1)\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $x^k(t_1)=x^{*k}(t_1)=x_1^k$ pour tout $k\in K$. Enfin, remarquons que $x^i(t_1)-x_1^i\leq 0$ pour $i\in I(x^*)$ et $x^j(t_1)-x_1^j\geq 0$ pour $j\in J(x^*)$. L'inégalité (3.8.2) découle de la condition de transversalité du théorème 3.6.1 :

$$\begin{gathered}
p^i(t_1)\geq 0,\; p^j(t_1)\leq 0 \text{ et } p^\ell(t_1)=0 \\
\text{pour tout } (i,j,\ell)\in I(x^*)\times J(x^*)\times L(x^*)\;.
\end{gathered}$$

□

3.9 Exemples

3.9.1 Régulateur linéaire quadratique

Dans cet exemple très classique, la variable de contrôle u prend ses valeurs dans $U = \mathbb{R}^p$ et l'équation d'état du système est linéaire en (x, u) :

$$\dot{x} \;=\; A(t)x(t) + B(t)u(t) \;,$$

où A et B sont deux fonctions définies sur $[t_0, t_1]$ et à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, p)$.

On considère alors le problème de Lagrange

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x^u(t_0) = x_0}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^u(t), u(t)\right)\, dt \;,$$

où la fonction de coût instantané F est quadratique en x et en u :

$$F(t, \xi, \nu) \;:=\; \xi \cdot M(t)\xi + \nu \cdot N(t)\nu \;,$$

M et N étant deux fonctions définies sur $[t_0, t_1]$ et à valeurs respectivement dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^{++}(n)$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^{++}(p)$ (ensemble des matrices symétriques semi définies positives de taille n et p).

Nous commençons par écrire le Hamiltonien du système :

$$H(t, \xi, \nu, \pi) \;:=\; \xi \cdot M(t)\xi + \nu \cdot N(t)\nu + \pi \cdot [A(t)\xi + B(t)\nu] \;.$$

Il s'agit d'une fonction convexe par rapport à la variable de contrôle ν, puisque $N(t)$ est une matrice positive. On calcule immédiatement la valeur du contrôle optimal en minimisant le Hamiltonien par rapport à la variable de contrôle

$$\min_{\nu \in U} H(t, \xi, \nu, \pi) \;=\; H(t, \xi, u^*(t), \pi) \quad \text{avec} \quad u^*(t) \;:=\; -\frac{1}{2}N(t)^{-1}B(t)^T p(t) \;.$$

L'état du système associé à ce contrôle optimal est ainsi défini par

$$\dot{x}(t) \;=\; A(t)x(t) - \frac{1}{2}B(t)N(t)^{-1}B(t)^T p(t) \;, \qquad x(0) = x_0 \;.$$

Enfin, l'état adjoint du système est défini par l'équation différentielle adjointe :

$$\dot{p}(t) \;=\; A(t)^T p(t) + 2M(t)x(t) \;,$$

ainsi que la condition de transversalité

$$p(t_1) \;=\; 0 \;.$$

Le couple (x, p) est ainsi défini par le système linéaire du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} A(t) & -\frac{1}{2}B(t)N(t)^{-1}B(t)^T \\ 2M(t) & A(t)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \;,$$

et les conditions aux bords

$$x(t_0) \;=\; x_0 \;, \qquad p(t_1) \;=\; 0 \;.$$

3.9.2 Modèle à deux biens de consommation

On étudie le comportement optimal d'un agent pouvant consommer deux biens. Les variables principales du modèle sont :

- le prix relatif du bien 2 par rapport au bien 1 est noté $y(t)$,

- le flux de revenu de l'agent touché sous la forme d'une dotation en bien 1 est noté $s(t)$

- le taux d'intérêt réel est noté $r(t)$

- la richesse de l'agent exprimée en terme du bien 1 est notée $x(t)$.

En supposant que le capital de l'agent est rémunérée au taux d'intérêt réel, on obtient la dynamique suivante de la richesse de l'agent :

$$\dot{x}(t) \;=\; r(t)x(t) + s(t) - c_1(t) - y(t)c_2(t) \;, \tag{3.9.1}$$

où $c_i(t)$ est le taux de consommation du bien i à l'instant t. Ainsi, la variable de contrôle du problème est le couple (c_1, c_2) qui est une fonction de $[0, T]$

dans $U = I\!R^2_+$. Soit $x_0 > 0$ un capital initial donnée, on cherche alors à résoudre le problème :

$$\sup_{\substack{(c_1,c_2)\in\mathcal{U}\\ x(0)=x_0\\ x(T)\geq 0}} \int_0^T e^{-\delta t} U\left(c_1(t),c_2(t)\right)\, dt\ ,$$

où $\delta > 0$ est un facteur d'escompte psychologique et

$$(\sigma_1,\sigma_2)\in I\!R^2_+ \quad\longmapsto\quad U(\sigma_1,\sigma_2)$$

est une fonction de classe C^1, concave en (σ_1,σ_2), et croissante par rapport à chacun de ses arguments. Afin de simplifier l'analyse, on supposera que

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma_i}(\sigma_1,\sigma_2) \;=\; +\infty \quad \text{pour} \quad (\sigma_1,\sigma_2)\;\in\;\partial I\!R^2_+\ . \tag{3.9.2}$$

1. Commençons par écrire les conditions du premier ordre du problème. On remarque que la dynamique de l'état adjoint de ce problème est simplement donnée par

$$\dot p(t) \;=\; -r(t)p(t)dt\ .$$

Remarquons que la contrainte terminale $x(T)\geq 0$ est nécessairement saturée par la trajectoire optimale, i.e.

$$x^*(T) \;=\; 0\ . \tag{3.9.3}$$

Par suite, la condition de transversalité pour notre problème de **maximisation** est

$$p_T \;:=\; p(T) \;\;\geq\;\; 0\ .$$

On écrit alors l'expression de l'état adjoint en fonction de ce paramètre positif :

$$p(t) \;=\; p_T e^{\int_t^T r(s)ds} \quad \text{pour tout} \quad t\in[0,T]\ .$$

Le Hamiltonien du système est donné par :

$$H(t, \xi, \sigma_1, \sigma_2, \pi) \;\; := \;\; e^{-\delta t} U(\sigma_1, \sigma_2) + \pi \left[r(t)\xi + s(t) - \sigma_1 - y(t)\sigma_2 \right] \; .$$

Comme H est concave par rapport au couple (c_1, c_2), on résout le problème de maximisation du Hamiltonien en écrivant la condition du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^{-\delta t} \dfrac{\partial U}{\partial \sigma_1} \left(c_1^*(t), c_2^*(t) \right) & = & p(t) \\ e^{-\delta t} \dfrac{\partial U}{\partial \sigma_2} \left(c_1^*(t), c_2^*(t) \right) & = & p(t) y(t) \; , \end{array} \right. \tag{3.9.4}$$

sans se soucier de la condition de positivité sur les consommations c_1 et c_2, grâce à (3.9.2).

2. Supposons maintenant que

$$U(\sigma_1, \sigma_2) \;\; = \;\; \ln \left[V(\sigma_1, \sigma_2) \right] \; ,$$

où V est une fonction concave, homogène de degré 1, et croissante en chacun de ses arguments. Dans ce cas, on peut ré-écrire le système (3.9.4) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V\left(c_1^*(t), c_2^*(t) \right) - c_2^*(t) V_{\sigma_2} \left(1, \frac{c_2^*(t)}{c_1^*(t)} \right) & = & e^{+\delta t} p(t) c_1^*(t) V\left(c_1^*(t), c_2^*(t) \right) \\ c_2^*(t) V_{\sigma_2} \left(1, \frac{c_2^*(t)}{c_1^*(t)} \right) & = & e^{+\delta t} p(t) y(t) c_2^*(t) V\left(c_1^*(t), c_2^*(t) \right) \; . \end{array} \right.$$

En additionnant les deux équations du système, on obtient :

$$\hat{c}(t) \;\; := \;\; c_1^*(t) + y(t) c_2^*(t) \;\; = \;\; p_T^{-1} e^{-\delta t - \int_t^T r(s) ds} \; .$$

Revenant à l'équation d'état, on voit qu'on peut l'exprimer en fonction de cette nouvelle variable

$$\dot{x}^*(t) \;\; = \;\; r(t) x^*(t) + s(t) - \hat{c}(t) \; ,$$

dont on peut écrire la solution explicite en fonction de la condition initiale $x^*(0) = x_0$:

$$x^*(t) \;\; = \;\; x_0 e^{\int_0^t r(s) ds} - \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta p_T} e^{-\int_t^T r(s) ds} + \int_0^t s(u) e^{\int_u^T r(v) dv} du \; .$$

Enfin, en écrivant la condition (3.9.3), on détermine la valeur de la constante

$$p_T \;=\; \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)/\delta}{x_0 e^{\int_0^T r(s)ds} + \int_0^T s(u) e^{\int_u^T r(v)dv} du} \;,$$

identifiant ainsi complètement l'état optimal du système et l'état adjoint. Pour obtenir les fonctions consommation optimale $c_i(.)$, il suffit maintenant de résoudre le système (3.9.4).

3. Pour aller plus loin dans les calculs, on peut maintenant spécifier la fonction V sous la forme

$$V(\sigma_1,\sigma_2) \;:=\; \sigma_1^{\alpha}\sigma_2^{1-\alpha} \;,$$

où α est un paramètre dans l'intervalle ouvert $]0,1[$...

3.9.3 Croissance optimale avec ressource épuisable

Nous reprenons ici l'exemple qui a été traité dans le paragraphe 2.5.3 par le calcul des variations. Rappelons qu'il s'agit du problème d'optimisation dynamique suivant :

$$\sup_{\substack{(c,r)\in\mathcal{U} \\ x(0)=x_0 \\ x(T)=0}} \int_0^T \ln c(t)dt$$

avec des variables d'état contrôlées $x := (y,k)$ définies par l'équation d'état :

$$\dot{y}(t) \;=\; -r(t) \quad \text{et} \quad \dot{k}(t) \;=\; ak(t)^{1-\alpha}r(t)^{\alpha} - c(t) \;.$$

Le Hamiltonien du système s'écrit

$$H(y,k,c,r,\pi,\mu) \;:=\; \ln c - \pi r + \mu\left[ak^{1-\alpha}r^{\alpha} - c\right] \;.$$

Il s'agit d'une fonction strictement concave en (c,r), on obtient alors le maximum par la condition du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^*(t)} - q(t) \;=\; 0 \\ -p(t) + \alpha a q(t) k^*(t)^{1-\alpha} r^*(t)^{\alpha-1} \;=\; 0 \;. \end{cases} \tag{3.9.5}$$

La dynamique des variables d'état adjoint est régie par l'équation différentielle adjointe :

$$\dot{p}(t) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \dot{q}(t) \;=\; -a(1-\alpha)\left(\frac{r^*(t)}{k^*(t)}\right)^{\alpha} q(t)\ . \qquad (3.9.6)$$

Posons alors $z(t) = r^*(t)/k^*(t)$. D'après la première équation de (3.9.6), on voit que $p(t) = \pi$ pour tout $t \in [0, T]$. Par suite en dérivant la deuxième équation de (3.9.5) par rapport à t, on obtient

$$(1-\alpha)\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} \;=\; \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\ ,$$

et la deuxième équation de (3.9.6) devient :

$$z(t)^{-(1+\alpha)}\dot{z}(t) \;=\; -a\ .$$

On en déduit l'existence d'une constante b telle que

$$a\left(\frac{r(t)}{k(t)}\right)^{\alpha} \;=\; az(t)^{\alpha} \;=\; \frac{1}{b+\alpha t}\ .$$

On a ainsi déterminé l'expression des variables d'état adjoint à deux constantes près :

$$p(t) \;=\; \pi \quad \text{et} \quad q(t) \;=\; \frac{\pi}{\alpha}a^{-1/\alpha}(b+\alpha t)^{1-\frac{1}{\alpha}}\ .$$

Ceci permet de déterminer la consommation optimale (à deux constantes près) d'après la première équation de (3.9.5) :

$$c^*(t) \;=\; \frac{\alpha}{\pi}a^{1/\alpha}(b+\alpha t)^{-1+\frac{1}{\alpha}}\ ,$$

et la dynamique de la variable k^* est alors donnée par

$$\begin{aligned}\dot{k}^*(t) \;&=\; az(t)^{\alpha}k^*(t) - c^*(t)\\ &=\; (b+\alpha t)^{-1}k^*(t) - \frac{\alpha}{\pi}a^{1/\alpha}(b+\alpha t)^{1-\frac{1}{\alpha}}\ .\end{aligned}$$

Cette équation se résout explicitement. Tenant compte de la contrainte $k^*(T) = 0$, on obtient l'expression de $k^*(t)$ (à deux constantes près) :

$$k^*(t) \quad = \quad \frac{\alpha}{\pi} a^{1/\alpha} (b_2 + \alpha t)^{1/\alpha} \ln \left(\frac{b_2 + \alpha T}{b_2 + \alpha t} \right)^{1/\alpha} .$$

On peut maintenant déterminer la variable d'état y en revenant à l'équation d'état :

$$\dot{y}^*(t) \quad = \quad -z(t) k^*(t) .$$

Compte tenu de la contrainte terminale $y^*(T) = 0$, on obtient l'expression de y^*, toujours aux deux constantes près :

$$y(t) \quad = \quad \frac{\alpha}{\pi} \int_t^T \ln \left(\frac{b_2 + \alpha T}{b_2 + \alpha t} \right)^{1/\alpha} dt .$$

Enfin, pour déterminer les constantes π et b, il ne reste plus qu'à écrire que :

$$k^*(0) \; = \; k_0 \quad \text{et} \quad y^*(0) \; = \; y_0 .$$

Chapter 4

Approche de la programmation dynamique

Comme dans les chapitres précédents, on s'intéresse au problème d'optimisation dynamique

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), u(t)\right) dt + G\left(x(t_1)\right) \tag{4.0.1}$$

où l'état du système contrôlé est régi par la dynamique

$$x(t_0) = x_0 \;, \qquad \dot{x}(t) \;=\; f\left(t, x(t), u(t)\right) \;. \tag{4.0.2}$$

On supposera que la fonction $f \;:\; [t_0, t_1] \times I\!R^n \times U \longrightarrow I\!R^n$ vérifie les conditions de Lipschitz et de croissance linéaire du théorème 3.3.1, qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation d'état (4.0.2).

La fonction $F \;:\; [t_0, t_1] \times I\!R^n \times U \longrightarrow I\!R$ sera supposée continue. L'ensemble $\mathcal{U}$ désigne comme dans les paragraphes précédents la famille de toutes les fonctions continues par morceaux de $[t_0, t_1]$ dans un sous ensemble fermé U de $I\!R^k$.

4.1 Formulation dynamique du problème

L'approche de Bellman pour la résolution du problème (4.0.1) consiste à exploiter le caractère dynamique du système. Pour celà on commence par introduire la *version dynamique du problème* en plaçant l'origine des temps à des dates $t \in [t_0, t_1]$.

Contrôles admissibles : afin de définir l'évolution du système à partir de la date t, nous avons besoin uniquement de la restriction de la variable de contrôle sur $[t, t_1]$. On désigne alors par

$$\mathcal{U}_t \quad := \quad \{u \ : \ [t, t_1] \longrightarrow U \text{ continue par morceaux}\} \ .$$

L'équation d'état du système est maintenant définie par une variable de contrôle $u \in \mathcal{U}_t$ et une condition initiale au temps t :

$$x(t) = x_t \ , \qquad \dot{x}(s) \ = \ f\left(s, x(s), u(s)\right) \ .$$

La fonction de coût relative à la période de temps restante est définie par :

$$J\left(t, x_t, u\right) \quad := \quad \int_t^{t_1} F\left(s, x(s), u(s)\right) ds + G\left(x(t_1)\right) \ ,$$

où la dépendance de l'état du système x par rapport à la variable de contrôle u a encore été omise.

La version dynamique du problème (4.0.1) est définie par :

$$V(t, x_t) \quad := \quad \inf_{u \in \mathcal{U}_t} J(t, x_t, u) \ . \tag{4.1.1}$$

Le problème (4.0.1) correspond au cas où l'origine des temps est t_0 et est donné par $V(t_0, x_0)$. L'approche de Bellman consiste à déduire $V(0, x_0)$ à partir de la caractérisation de la fonction valeur V comme fonction des deux variables t et x_t.

4.2 Principe de la programmation dynamique

Théorème 4.2.1 *Soient $t \in [t_0, t_1[$ et $x_t \in \mathbb{R}^n$ donnés. Alors, pour tout réel $s \in [t, T]$, on a :*

$$V(t, x_t) \;=\; \inf_{u \in \mathcal{U}_t} \left\{ \int_t^s F\left(r, x(r), u(r)\right) dr + V\left(s, x(s)\right) \right\} .$$

Démonstration. Pour $t \in [t_0, t_1[$, $s \in [t, T]$ et $x_t \in \mathbb{R}^n$ fixés, on note

$$W(t, x_t) \;:=\; \inf_{u \in \mathcal{U}_t} \left\{ \int_t^s F\left(r, x(r), u(r)\right) dr + V\left(s, x(s)\right) \right\} .$$

1. Pour montrer que $V \leq W$, on considère deux variables de contrôle arbitraires $u \in \mathcal{U}_t$ et $v \in \mathcal{U}_s$, et on remarque que

$$w \;:=\; u\mathbf{1}_{[t,s[} + v\mathbf{1}_{[s,t_1[}$$

définit une variable de contrôle dans $\mathcal{U}_t$. Par définition de $V(t, x_t)$, on a alors :

$$\begin{aligned} V(t, x_t) \;\leq\; J(t, x_T, w) \;&=\; \int_t^{t_1} F\left(r, x(r), w(r)\right) dr + G\left(x(t_1)\right) \\ &= \int_t^s F\left(r, x(r), u(r)\right) dr + \int_s^{t_1} F\left(r, x(r), v(r)\right) dr + G\left(x(t_1)\right) \\ &= \int_t^s F\left(r, x(r), u(r)\right) dr + J\left(s, x(s), v\right) . \end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité $V \leq W$ en prenant l'infimum sur les $u \in \mathcal{U}_t$ et les $v \in \mathcal{U}_s$.

2. Pour obtenir l'inégalité inverse, on se donne un paramètre $\varepsilon > 0$ ainsi qu'un contrôle $\varepsilon-$optimal $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_t$ pour le problème $V(t, y)$:

$$V(t, x_t) \;\leq\; J(t, x_t, u_\varepsilon) \;\leq\; V(t, x_t) + \varepsilon .$$

En remarquant que la fonction $\tilde{u}_\varepsilon$, définie comme la restriction de u_ε à l'intervalle $[s, t_1]$, est une variable de contrôle dans $\mathcal{U}_s$, on déduit de la définition de J que :

$$\begin{array}{rcl} W(t,y) & \leq & \int_t^s F\left(r,x(r),u_\varepsilon(r)\right)dr + V\left(s,x(s)\right) \\ & \leq & \int_t^s F\left(r,x(r),u_\varepsilon(r)\right)dr + J\left(s,x(s),\tilde{u}_\varepsilon\right) \\ & = & J\left(t,x_t,u_\varepsilon\right) \\ & \leq & V(t,y)+\varepsilon\ , \end{array}$$

et l'inégalité voulue découle du caractère arbitraire du paramètre $\varepsilon > 0$. $\square$

Remarque 4.2.1 Observons que l'argument essentiel de la démonstration est la possibilité de recollement, ou de concaténation, des variables de contrôle. Celà n'aurait pas été possible si on s'était restreint à des variables de contrôle continues

Remarque 4.2.2 La principe de la programmation dynamique ci-dessus dit en particulier que la fonction

$$s \longmapsto \int_t^s F\left(r,x(r),u(r)\right)dr + V\left(s,x(s)\right)$$

est une fonction croissante, pour tout choix de la variable de contrôle $u \in \mathcal{U}_t$.

Remarque 4.2.3 S'il existe un contrôle optimal $u^* \in \mathcal{U}_t$ pour le problème (4.1.1), i.e. $V(t,x_t) = J(t,x_t,u^*)$, alors la fonction

$$s \longmapsto \int_t^s F\left(r,x^*(r),u^*(r)\right)dr + V\left(s,x^*(s)\right)$$

est constante, où on a noté $x^* := x^{u^*}$. En effet, d'après la propriété de décroissance ci-dessus et le fait que $V(t_1,x_{t_1}) = G(x_{t_1})$, on a :

$$\begin{array}{rcl} V(t,x_t) & \leq & \int_t^{t_1} F\left(r,x(r),u^*(r)\right)dr + V\left(t_1,x^*(t_1)\right) \\ & = & \int_t^{t_1} F\left(r,x(r),u^*(r)\right)dr + G\left(x^*(t_1)\right) \\ & = & J(t,x_t,u^*) \ = \ V(t,x_t)\ . \end{array}$$

Remarque 4.2.4 D'après la remarque précédente, on voit que si $u^* \in \mathcal{U}_t$ est un contrôle optimal pour le problème $V(t,x_t)$ de (4.1.1), alors la restriction de u^* à l'intervalle $[s,t_1]$ est un contrôle optimal pour le problème $V(s,x^*(s))$ pour tout $s \in [t,t_1]$.

4.3 Equation de Hamilton-Jacobi

On rappelle la définition du Hamiltonien du système

$$H(t,\xi,\nu,\pi) \quad := \quad F(t,\xi,\nu) + \pi \cdot f(t,\xi,\nu)$$

pour tous $(t,\xi,\nu) \in [t_0,t_1] \times I\!R^n \times U$. Comme dans l'approche du principe du maximum de Pontryagin, la recherche du contrôle optimal est liée à la minimisation du Hamiltonien. On définit alors :

$$H^*(t,\xi,\pi) \quad := \quad \inf_{\nu \in U} H(t,\xi,\nu,\pi) \; .$$

Théorème 4.3.1 *Supposons que la fonction V soit de classe C^1 sur $[t_0,t_1] \times I\!R^n$. Alors :*
(i) *V est une sursolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi :*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,\xi) + H^*\left(t,\xi,D_xV(t,\xi)\right) \;\geq\; 0 \quad \textit{pour} \quad (t,\xi) \in [t_0,t_1[\times I\!R^n \; .$$

(ii) *Si de plus la fonction H^* est continue, alors V est solution de l'équation d'Hmilton-Jacobi :*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,\xi) + H^*\left(t,\xi,D_xV(t,\xi)\right) \;=\; 0 \quad \textit{pour} \quad (t,\xi) \in [t_0,t_1[\times I\!R^n \; .$$

Démonstration. (i) D'après le principe de la programmation dynamique,

$$V(t,x_t) \quad \leq \quad \int_t^{t+h} F\left(r,x(r),u(r)\right) dr + V\left(t+h, x(t+h)\right)$$

pour tous $h \in]0, t_1 - t]$ et $u \in \mathcal{U}_t$. Prenons une variable de contrôle constante $u(r) = \nu$ pour tout $r \in [t,t_1]$, où ν est un élément arbitraire dans U. Comme V est de classe C^1, on peut ré-écrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$0 \quad \leq \quad \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}\left(r,x(r)\right) + H\left(r,x(r),\nu,D_xV(r,x(r))\right) \right\} dr \; .$$

Remarquons à présent que la fonction à l'intérieur de l'intégrale est continue par rapport à la variable temporelle. En faisant tendre h vers zéro, on déduit alors du théorème de la moyenne que

$$0 \quad \leq \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t,x_t) + H\left(t,x_t,\nu,D_xV(t,x_t)\right) \; ,$$

et on obtient le résultat annoncé comme conséquence du caractère arbitraire de $\nu \in U$.

(ii) Pour montrer la deuxième partie du théorème, nous allons supposer au contraire l'existence d'un couple $(t^*, \xi^*) \in [t_0, t_1[\times I\!R^n$ tel que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t^*, \xi^*) + H^*\left(t^*, \xi^*, D_x V(t^*, \xi^*)\right) \ > \ 0\ ,$$

et nous chercherons à aboutir à une contradiction. On introduit la fonction

$$\varphi(t,\xi) \ := \ V(t,\xi) - |t-t^*|^2 - |\xi - \xi^*|^2 \quad \text{pour} \quad (t,\xi) \in [t_0, t_1] \times I\!R^n\ .$$

Comme $DV(t^*, \xi^*) = D\varphi(t^*, \xi^*)$, on voit que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t^*, \xi^*) + H^*\left(t^*, \xi^*, D_x \varphi(t^*, \xi^*)\right) \ > \ 0$$

et, d'après la continuité de H^*, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \xi) + H^*\left(t, \xi, D_x \varphi(t, \xi)\right) \ \geq \ 0 \tag{4.3.1}$$

$$\text{pour tout} \ \ (t,\xi) \in D_\delta := [t^*, t^*+\delta] \times \overline{B}_\delta(\xi^*)\ , \tag{4.3.2}$$

où $\overline{B}_\delta(\xi^*)$ désigne la boule fermée de rayon δ et de centre ξ^*. Comme (t^*, ξ^*) est un point de minimum strict pour la fonction $V - \varphi$, on a :

$$2\varepsilon \ := \ \min_{\partial D_\delta} (V - \varphi) \ \ > \ \ 0\ . \tag{4.3.3}$$

Enfin, soit $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_{t^*}$ un contrôle $\varepsilon-$optimal pour $V(t^*, \xi^*)$, $x_\varepsilon := x^{u_\varepsilon}$ l'état du système associé, et $h_\varepsilon > 0$ la durée de temps définie par

$$t^* + h_\varepsilon \ \ := \ \ \inf\left\{t > t_0 \ : \ (t, x_\varepsilon(t)) \not\in D_\delta\right\}\ .$$

Remarquons que, par continuité de x_ε, on a $(t^* + h_\varepsilon, x_\varepsilon(t^* + h_\varepsilon)) \in \partial D_\delta$, et par suite :

$$V\left(t^* + h_\varepsilon, x_\varepsilon(t^* + h_\varepsilon)\right) \ \ \geq \ \ 2\varepsilon + \varphi\left(t^* + h_\varepsilon, x_\varepsilon(t^* + h_\varepsilon)\right)\ , \tag{4.3.4}$$

par définition de ε dans (4.3.3).

Comme u_ε est une variable de contrôle $\varepsilon-$ optimale, on a :

$$\begin{aligned}
V(t^*,\xi^*)+\varepsilon &\geq J(t^*,\xi^*,u_\varepsilon)\\
&= \int_{t^*}^{t^*+h_\varepsilon} F\left(r,x_\varepsilon(r),u_\varepsilon(r)\right)dr + J\left(t_0+h_\varepsilon, x_\varepsilon(t_0+h_\varepsilon),\tilde{u}_\varepsilon\right)\\
&\geq \int_{t^*}^{t^*+h_\varepsilon} F\left(r,x_\varepsilon(r),u_\varepsilon(r)\right)dr + V\left(t_0+h_\varepsilon, x_\varepsilon(t_0+h_\varepsilon)\right)\ ,
\end{aligned}$$

où $\tilde{u}_\varepsilon$ est la restriction de u_ε à l'intervalle $[t^*+h_\varepsilon, t_1]$. En se rappelant que $V(t^*,\xi^*)=\varphi(t^*,\xi^*)$ et en utilisant (4.3.4), on obtient alors :

$$\varphi(t^*,\xi^*)+\varepsilon \ \geq\ \int_{t^*}^{t^*+h_\varepsilon} F\left(r,x_\varepsilon(r),u_\varepsilon(r)\right)dr + 2\varepsilon + \varphi\left(t_0+h_\varepsilon, x_\varepsilon(t_0+h_\varepsilon)\right)\ ,$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &\geq \int_{t^*}^{t^*+h_\varepsilon} \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r,x_\varepsilon(r)) + H\left(r,x_\varepsilon(r),u_\varepsilon(r),D_x\varphi(r,x_\varepsilon(r))\right)\right\} dr\\
&\geq \int_{t^*}^{t^*+h_\varepsilon} \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r,x_\varepsilon(r)) + H^*\left(r,x_\varepsilon(r),D_x\varphi(r,x_\varepsilon(r))\right)\right\} dr\\
&\geq 0\ ,
\end{aligned}$$

puisque $(r,x_\varepsilon(r))\in D_\delta$ pour $t^*\leq r\leq t^*+h_\varepsilon$. Cette inégalité est contradictoire avec (4.3.3) et termine la démonstration. □

Avant de conclure ce paragraphe, remarquons que l'hypothèse de régularité C^1 sur la fonction valeur est très forte. En effet, il est facile de construire des exemples de problèmes d'optimisation dynamique qui conduisent à une fonction valeur non régulière, voir exemple ci-dessous. Ceci a motivé l'introduction de différentes notions de solutions faibles. Pour celà il existe deux voies :

- soit, on ré-écrit la démonstration du théorème en utilisant des dérivées généralisés au sens de Schwartz ; là encore, il faut démontrer, ou supposer, que la fonction valeur admet cette régularité faible ; le lecteur intéressé peut consulter l'ouvrage de Fleming et Rishel [2].

- soit on utilise la théorie des solutions de viscosité qui nécessite uniquement de vérifier que la fonction valeur est localement bornée afin de pouvoir définir ses enveloppes semi continues supérieure et inférieure; le lecteur intéressé peut consulter l'ouvrage de Fleming et Soner [3].

Exemple (*problème d'optimisation dynamique avec fonction valeur non régulière.*) Prenons $f(t, \xi, \nu) = \nu$, $U = [-1, 1]$, and $n = 1$. L'état contôlé du système est ainsi défini par :

$$x(t) \;=\; x + \int_{t_0}^{t} u(s)ds \quad \text{pour} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \;.$$

On considère le problème d'optimisation dynamique

$$\begin{aligned} V(t, x) \;&:=\; \sup_{u \in \mathcal{U}} \, |x(t_1)|^2 \\ &=\; \sup_{u \in \mathcal{U}} \left(x + \int_{t}^{t_1} u(s)ds \right)^2 \;. \end{aligned}$$

Il est facile d'obtenir directement la solution de ce problème :

$$V(t, x) \;=\; \begin{cases} (x + T - t)^2 & \text{pour } x \geq 0 \quad \text{avec contôle optimal } \hat{\nu} = 1 \;, \\ (x - T + t)^2 & \text{pour } x \leq 0 \quad \text{avec contôle optimal } \hat{\nu} = -1 \;. \end{cases}$$

Cette fonction est continue, mais n'est pas dérivable au point $x = 0$.

4.4 Théorème de vérification

Le résultat principal de ce paragraphe donne une condition suffisante pour qu'une fonction vérifiant l'équation d'Hamilton-Jacobi soit solution du problème d'optimisation dynamique (4.0.1).

Théorème 4.4.1 *Soit* $W \; : [t_0, t_1] \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$ *de classe* C^1.
(i) *Si*

$$W(T, \xi) \;\leq\; G(\xi) \quad et \quad -\frac{\partial W}{\partial t}(t, \xi) - H^*\left(t, \xi, D_x W(t, \xi)\right) \;\leq\; 0 \;,$$

alors $W \leq v$.
(ii) *Si*

$$W(T,\xi) \;=\; G(\xi)\;, \qquad -\frac{\partial W}{\partial t}(t,\xi) - H^*\left(t,\xi,D_xW(t,\xi)\right) \;=\; 0\;,$$

et il existe une variable de contrôle $u^* \in \mathcal{U}_t$ *telle que pour tout* $s \in [t,T]$ *:*

$$H^*\left(s,x^*(s),D_xW(s,x^*(s))\right) \;=\; H^*\left(s,x^*(s),u^*(s),D_xW(s,x^*(s))\right)\;,$$

alors $V = W$.

Démonstration. Soit u une variable de contrôle dans $\mathcal{U}_t$ et $x := x^u$ l'état du système associé vérifiant la condition initiale $x(t) = \xi$. La fonction W étant de classe C^1, on écrit :

$$\begin{aligned} W(t_1,x(t_1)) &= W(t,\xi) + \int_t^{t_1}\left\{\frac{\partial W}{\partial t}(r,x(r)) + \frac{\partial W}{\partial x}(r,x(r))\cdot\dot{x}(r)\right\}\,dr \\ &= W(t,\xi) + \int_t^{t_1}\left\{\frac{\partial W}{\partial t}(r,x(r)) + \frac{\partial W}{\partial x}(r,x(r))\cdot f(r,x(r),u(r))\right\}\,dr \\ &= W(t,\xi) - \int_t^{t_1} F(r,x(r),u(r))dr \\ &\quad + \int_t^{t_1}\left\{\frac{\partial W}{\partial t}(r,x(r)) + H\left(r,x(r),u(r),D_xW(r,x(r))\right)\right\}\,dr\;. \end{aligned}$$

On utilise maintenant la définition de H^* ainsi que l'inéquation différentielle vérifiée par W pour obtenir :

$$\begin{aligned} W(t_1,x(t_1)) &\geq W(t,\xi) - \int_t^{t_1} F(r,x(r),u(r))dr \\ &\quad + \int_t^{t_1}\left\{\frac{\partial W}{\partial t}(r,x(r)) + H^*\left(r,x(r),D_xW(r,x(r))\right)\right\}\,dr \\ &\geq W(t,\xi) - \int_t^{t_1} F(r,x(r),u(r))dr\;. \end{aligned}$$

Enfin, comme $W(T,.) \leq G$ et la variable de contrôle u est arbitraire dans $\mathcal{U}_t$, ceci permet de déduire que :

$$\begin{aligned} W(t,\xi) &\leq \inf_{u\in\mathcal{U}_t} \int_t^{t_1} F(r,x(r),u(r))dr + W(t_1,x(t_1)) \\ &\leq \inf_{u\in\mathcal{U}_t} \int_t^{t_1} F(r,x(r),u(r))dr + G(x(t_1)) \;=\; V(t,\xi)\;. \end{aligned}$$

(ii) On ré-écrit l'argument ci-dessus avec la variable de contrôle u^* introduite dans la partie (ii) du théorème, et on vérifie que toutes les inégalités sont en fait des égalités. $\square$

Remarque 4.4.1 La variable de contrôle u^* introduite au (ii) du théorème 4.4.1 précédent est obtenue par minimisation de la fonction $H\left(t, x^*(t), \nu, W_x(t, x^*(t))\right)$. Par conséquent, on peut écrire $u^*(t) = \hat{\nu}\left[t, x^*(t), W_x(t, x^*(t))\right]$ pour une certaine fonction $\hat{\nu}$, et l'équation d'état du système est donnée par

$$\dot{x}^*(t) \;=\; g\left(t, x^*(t)\right) \;:=\; f\left(t, x^*(t), \hat{\nu}\left[t, x^*(t), \nu, W_x(t, x^*(t))\right]\right) \;.$$

Ainsi, afin de garantir que u^* soit un contrôle admissible, i.e. $u^* \in \mathcal{U}_t$, il faut vérifier que la fonction g vérifie les conditions de Lipschitz et de croissance linéaire.

4.5 Exemples

4.5.1 Régulateur linéaire quadratique

Reprenons une version de type *Bolza* de l'exemple du paragraphe 3.9.1. Rappelons que la variable de contrôle u prend ses valeurs dans $U = I\!R^p$ et l'équation d'état du système est linéaire en (x, u) :

$$\dot{x} \;=\; A(t)x(t) + B(t)u(t) \;,$$

où A et B sont deux fonctions définies sur $[t_0, t_1]$ et à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_{I\!R}(n, n)$ et $\mathcal{M}_{I\!R}(n, p)$. Il s'agit de résoudre le problème de Lagrange

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x^u(t_0) = x_0}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^u(t), u(t)\right)\, dt \;+\; G\left(x^u(t_1)\right) \;,$$

où la fonction de coût instantané F est quadratique en x et en u :

$$F(t, \xi, \nu) \;:=\; \xi \cdot M(t)\xi + \nu \cdot N(t)\nu \quad \text{et} \quad G(\xi) \;:=\; \xi \cdot Q\xi \;,$$

M et N étant deux fonctions définies sur $[t_0, t_1]$ et à valeurs respectivement dans $\mathcal{S}_{I\!R}^{++}(n)$ et $\mathcal{S}_{I\!R}^{++}(p)$ (ensemble des matrices symétriques semi définies positives de taille n et p), et $Q \in \mathcal{S}_{I\!R}^{+}(p)$.

Le Hamiltonien du système

$$H(t, \xi, \nu, \pi) \ := \ \xi \cdot M(t)\xi + \nu \cdot N(t)\nu + \pi \cdot [A(t)\xi + B(t)\nu]$$

est une fonction convexe par rapport à la variable de contrôle ν, puisque $N(t)$ est une matrice positive. On calcule immédiatement la valeur du contrôle optimal en minimisant le Hamiltonien par rapport à la variable de contrôle

$$H^*(t, \xi, \pi) \ = \ H(t, \xi, u^*(t), \pi) \quad \text{avec} \quad u^*(t) \ := \ -\frac{1}{2} N(t)^{-1} B(t)^T p(t) \ ,$$

et

$$H^*(t, \xi, \pi) \ = \ \xi \cdot M(t)\xi + \pi \cdot A(t)\xi - \frac{1}{4}\pi \cdot B(t)N(t)^{-1}B(t)^T\pi \ .$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \frac{\partial V}{\partial t}(t, \xi) + H^*\left(t, \xi, \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi)\right) \\ &= \ \frac{\partial V}{\partial t}(t, \xi) + \xi \cdot M(t)\xi + \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) \cdot A(t)\xi \\ &\quad -\frac{1}{4}\frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) \cdot B(t)N(t)^{-1}B(t)^T \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) \ . \end{aligned}$$

On cherche alors une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi sous la forme

$$V(t, \xi) \ = \ \xi \cdot K(t)\xi \ , \quad \text{pour} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \ . \tag{4.5.1}$$

Remarquons tout d'abord que $V(T, \xi) = \xi \cdot Q\xi$, ce qui est compatible avec la forme ci-dessus et impose

$$K(T) \ = \ Q \ .$$

Remplaçons ensuite la forme (4.5.1) dans l'équation d'Hamilton-Jacobi. En utilisant le caractère arbitraire de $\xi \in I\!R^n$, on obtient :

$$\dot{K}(t) \ = \ \frac{1}{4}\, K(t) \cdot B(t)N(t)^{-1}B(t)^T K(t) - K(t) \cdot A(t) - M(t) \ .$$

Il s'agit donc d'une équation de Riccati dont on peut exhiber une expression explicite de la solution dans certains cas. Enfin, la solution du problème est complètement caractérisée en vérifiant que la fonction $V(t,\xi)$ ainsi trouvée vérifie toutes les conditions du théorème de vérification.

4.5.2 Modèle de consommation optimale

Reprenons l'exemple du paragraphe 2.5.2 en incluant le désir de l'investisseur de laisser un héritage à sa descendance. Rappelons que la variable d'état est régie par la dynamique

$$\dot{x}(t) \;=\; -c(t) \quad \text{et} \quad x(0) \;=\; x_0 \;,$$

où $c(t)$ est un taux de consommation à la date t. Les préférences de l'agent sont caractérisées par la fonction d'utilité :

$$U(c) \;=\; \int_0^T e^{-\beta t} u\left(c(t)\right)\, dt + e^{-\beta T} u\left(x(t)\right)$$

où

$$u(\xi) \;:=\; \frac{\xi^\gamma}{\gamma} \;,$$

$\gamma < 1$ étant un paramètre donné. Rappelons que la contrainte de positivité de la consommation peut être ignorée, comme il a été expliqué dans la remarque 1.2.1. Le problème de choix optimal de consommation s'écrit :

$$\sup_{c \in \mathcal{U}} U(c) \;,$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[t_0, t_1]$ dans $I\!R^+$.

Dans cet exemple, Le Hamiltonien est donné par

$$H(t,\xi,\sigma,\pi) \;:=\; e^{-\beta t} u(\sigma) - \pi\sigma \;.$$

Comme H est concave par rapport ̀la variable de contrôle σ, on déduit aisément que

$$H^*(t,\xi,\pi) \;=\; H(t,\xi,\sigma^*(t),\pi) \quad \text{avec} \quad \sigma^*(t) \;:=\; \left(\pi e^{\beta t}\right)^{-1/(1-\gamma)} \;,$$

et

$$H^*(t, \xi, \pi) \;=\; \frac{1-\gamma}{\gamma} e^{-\beta t} \left(\pi e^{\beta t}\right)^{-\gamma/(1-\gamma)}$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial t}(t,\xi) + H^*\left(t, \xi, \frac{\partial V}{\partial x}(t,\xi)\right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t,\xi) + \frac{1-\gamma}{\gamma} e^{-\beta t} \left(\pi e^{\beta t}\right)^{-\gamma/(1-\gamma)} \end{aligned}$$

On cherche alors une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi sous la forme

$$V(t,\xi) \;=\; e^{-\beta t} A(t) u(\xi) \;, \quad \text{pour} \quad t_0 \le t \le t_1 \;.$$

Remarquons que $V(T,\xi) = e^{-\beta T} u(\xi)$ et, par suite, la fonction A doit vérifier la condition terminale

$$A(T) \;=\; 1 \;.$$

En remplaçant dans l'équation d'Hamilton-Jacobi, on obtient que la fonction $A(.)$ doit vérifier l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{A}(t) + (1-\gamma) A(t)^{-\gamma/(1-\gamma)} - \beta A(t) \;=\; 0 \;,$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left\{A(t)^{1/(1-\gamma)}\right\} \;=\; \frac{\beta}{1-\gamma} A(t)^{1/(1-\gamma)} - 1 \;.$$

Compte-tenu de la condition terminale $A(T) = 1$, ceci donne comme solution unique

$$A(t) \;=\; \left\{1 + \frac{1-\gamma}{\beta}\left[1 - e^{\beta(t-T)/(1-\gamma)}\right]\right\}^1 - \gamma\, e^{\beta(t-T)} \;.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $V(t,\xi)$ ainsi trouvée vérifie toutes les conditions du théorème de vérification...

4.5.3 Fonction valeur non régulière en des points isolés

Une relecture de la démonstration du théorème 4.4.1 révèle que *l'énoncé du théorème reste vrai dans le cas où la fonction W (candidat pour la fonction valeur) est de classe C^1 sauf en des points isolés.*

Dans cet exemple, nous reprenons l'exemple du paragraphe 4.3 dans lequel la fonction valeur V est de classe C^1 sauf en zéro, point isolé du domaine. Rappelons qu'il s'agit du problème d'optimisation dynamique suivant :

$$V(t,x) \ := \ \sup_{u\in\mathcal{U}} |x(t_1)|^2 \ ,$$

avec un état du système régi par

$$\dot{x}(t) \ = \ u(t)dt \quad \text{et} \quad x(t_0) \ = \ x \ ,$$

et la variable de contrôle u prend ses valeurs dans l'ensemble

$$U \ = \ [-1,1] \ .$$

On se propose ici de vérifier que la solution naturelle

$$V(t,x) \ = \ \begin{cases} (x+T-t)^2 & \text{pour } x \geq 0 \\ (x-T+t)^2 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, correspondant à ce problème, en tout point régulier. Le Hamiltonien du problème s'écrit

$$H(t,\xi,\nu,\pi) \ := \ \nu\pi \ ,$$

et par suite

$$H^*(t,\xi,\pi) \ := \ \sup_{|\nu|\leq 1} H(t,\xi,\nu,\pi) \ = \ |\pi| \ ,$$

et on vérifie immédiatement que la fonction V ci-dessus résout l'ďquation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \ = \ 0$$

en tout point $(t,\xi) \in [t_0,t_1] \times (I\!R \setminus \{0\})$.

4.6 Principe du maximum et programmation dynamique

4.6.1 Remarques générales

Rappelons que le principe du maximum de Pontryagin conduit à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires pour l'état optimal du système et l'état adjoint associé, avec la donnée d'une condition initiale pour l'état optimal du système et une condition terminale pour l'état adjoint. Quant à l'approche par la programmation dynamique, elle conduit à la résolution d'une équation aux dérivées partielles avec la donnée d'une condition terminale. Voici quelques remarques sur la comparaison de ces deux approches :
- La résolution d'une équation aux dérivées partielles est *a priori* plus difficile que la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires.
- L'approche par la programmation dynamique est particulièrement intéressante dans le cas où on a une idée'*a priori* sur la forme de la solution. Ceci est le cas pour le problème de consommation optimale du paragraphe 4.5.2, ou celui du régulateur quadratique linéaire du paragraphe 4.5.1.
- Dans la cas où on a recours à des méthodes numériques pour la résolution du problème, l'approche du principe du maximum présente l'inconvénient d'avoir une condition initiale pour la variable d'état et une condition finale pour la variable d'état adjoint. On est alors amené à mettre en place des méthodes numériques de type *forward-backward* qui peuvent être assez lourdes à gérer. L'équation d'Hamilton-Jacobi évite cette difficulté puisqu'elle ne fait intervenir qu'une condition terminale pour la fonction valeur du problème dynamique.

4.6.2 Lien entre les deux approches

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le principe du maximum est étroitement lié à l'équation d'Hamilton-Jacobi obtenue par l'approche de la programmation dynamique. Pour celà, nous allons ignorer toutes les difficultés liées à la régularité de la fonction valeur $V(t,x)$ du problème dynamique, et nous allons considérer la fonction

$$p(t) \;:=\; D_xV\left(t, x^*(t)\right) \;; \qquad t_0 \le t \le t_1 \;. \tag{4.6.1}$$

Comme $V(t_1,.) = G$, on voit que la fonction p vérifie la condition de tranbsversalité

$$p(t_1) \;=\; D_xG\left(x(t_1)\right) \;.$$

Nous allons maintenant vérifier que p vérifie l'équation d'état adjoint :

$$\dot p(t) \;=\; -H^*_x\left(t, x^*(t), p(t)\right) \;, \tag{4.6.2}$$

ce qui permet de conclure que la fonction p est l'état adjoint introduit dans le principe du maximum de Pontryagin. Pour obtenir (4.6.2), on dérive (4.6.1) par rapport à t :

$$\begin{aligned} \dot p(t) &= \frac{d}{dt}\left\{D_xV\left(t,x^*(t)\right)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\left(t,x^*(t)\right)\right\} + D_{xx}V\left(t,x^*(t)\right)\dot x^*(t) \;. \end{aligned}$$

En remarquant que $\dot x^*(t) = f\left(t,x^*(t),u^*(t)\right) = \left(\partial H^*/\partial p\right)\left(t,x^*(t),D_xV(t,x^*(t))\right)$, on voit que :

$$\begin{aligned} \dot p(t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\left(t,x^*(t)\right)\right\} \\ &\quad + D_{xx}V\left(t,x^*(t)\right)\frac{\partial H^*}{\partial p}\left(t,x^*(t),D_xV(t,x^*(t))\right) \;. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Enfin, en utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\left(t,x^*(t)\right)\right\} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{H^*\left(t,x^*(t),D_xV(t,x^*(t))\right)\right\} \\ &= -\frac{\partial H^*}{\partial x}\left(t,x^*(t),D_xV(t,x^*(t))\right) \\ &\quad - D_{xx}V\left(t,x^*(t)\right)\frac{\partial H^*}{\partial p}\left(t,x^*(t),D_xV(t,x^*(t))\right) \;, \end{aligned}$$

et on obtient alors (4.6.2) en remplaçant dans (4.6.3).

Chapter 5

Le problème d'existence

Dans ce chapitre, on considère la formulation de Mayer d'un problème d'optimisation dynamique :

$$V := \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x(t_0) = x_0}} G\left(x(t_1)\right) , \tag{5.0.1}$$

où la variable d'état x est régie par l'équation d'état contrôlée

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right) \quad t_0 \leq t \leq t_1 . \tag{5.0.2}$$

Nous allons donner *un* résultat d'existence pour ce problème utilisant des techniques standards de l'analyse, évitant en particulier les techniques d'analyse fonctionnelles à base de topologie faible. La difficulté principale provient du fait que $\mathcal{U}$ est un sous-ensemble d'un espace de dimension infini.

Comme d'habitude, afin d'établir un résultat d'existence, nous commençons par considérer une suite minimisante $(u^n)_{n\geq 0}$ pour le problème (5.0.1), et on note $x^n := x^{u^n}$ l'état du système associé. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} G\left(x^n(t_1)\right) = V$. Nous allons suivre le schéma de démonstration suivant :

1. en se plaçant dans un espace convenable pour l'état du système, nous commençons par montrer, par un raisonnement de compacité, l'existence d'une sous-suite $(x^{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge vers une certaine fonction x^*, et telle que $G\left(x^*(t_1)\right) = V$, par continuité de G;

2. on montre ensuite l'existence d'une variable de contrôle admissible u^* telle que $x^* = x^{u^*}$.

5.1 Variables de contrôle admissibles

Dans les chapitres précédents, nous avons considéré des variables de contrôle continues par morceaux, induisant des variables d'état C^1 par morceaux. Malheureusement, l'espace des fonctions C^1 par morceaux n'est pas compact pour les topologies naturelles, ce qui pose une difficulté majeure dans l'étape 1 ci-dessus. Il est alors nécessaire d'étendre l'espace qui contient les variables d'état.

Définition-théorème *Une fonction $\phi : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite absolument continue si elle est dérivable presque partout, et que sa dérivée ϕ' est mesurable et vérifie*

$$\phi(t) \;=\; \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi'(s)ds \;, \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \;.$$

On peut montrer que l'espace des fonctions absoluement continues est l'ensemble des limites uniformes de fonctions C^1 par morceaux. Par conséquent l'étape 1 ci-dessus pourra être effectuée confortablement dans cet espace. Afin de ramener les variables d'états à cet espace, il est nécessaire d'étendre l'ensemble des variables de contrôle admissibles en considérant

$$\mathcal{U} \;:=\; \{u \;:\; [t_0, t_1] \longrightarrow U \text{ mesurable}\} \;,$$

et on est donc amené au problème d'existence et d'unicité d'une solution à l'équation d'état (5.0.2) (étant donnée une condition initiale $x(t_0) = x_0$) dans le cas où la variable de contrôle u est mesurable.

Théorème 5.1.1 *Supposons que la fonction f vérifie les conditions de Lipschitz et de croissance linéaire*

$$\begin{aligned} |f(t,\xi_1,\nu) - f(t,\xi_2,\nu)| \ &\leq \ K \ |\xi_1 - \xi_2| \ , \quad \xi_1, \xi_2 \in I\!R^n, \ (t,\nu) \in [t_0,t_1] \times U \ , \\ |f(t,\xi,\nu)| \ &\leq \ K \ (1 + |\xi| + |\nu|) \ , \quad (t,\xi,\nu) \in [t_0,t_1] \times I\!R^n \times U \ . \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Soit u $[t_0,t_1] \longrightarrow U$ une fonction mesurable. Alors, il existe une unique fonction absoluement continue x vérifiant

$$x(t) \ = \ x_0 + \int_{t_0}^t f\left(s, x(s), u(s)\right) ds \quad \textit{pour} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \ . \tag{5.1.2}$$

Démonstration. 1. Commençons par montrer l'unicité. Soient x et y deux fonctions absoluement continues vérifiant

$$x(t) \ = \ x_0 + \int_{t_0}^t f\left(s, x(s), u(s)\right) ds \quad \text{et} \quad y(t) \ = \ x_0 + \int_{t_0}^t f\left(s, y(s), u(s)\right) ds$$

pour tout $t \in [t_0,t_1]$. En utilisant la condition de Lipschitz sur f, on obtient :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| \ &= \ \left| \int_{t_0}^t \left[f\left(s, x(s), u(s)\right) - f\left(s, y(s), u(s)\right) \right] \ ds \right| \\ &\leq \ \int_{t_0}^t \left| f\left(s, x(s), u(s)\right) - f\left(s, y(s), u(s)\right) \right| \ ds \\ &\leq \ K \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| \ ds \ , \end{aligned}$$

et on déduit que $|x(t) - y(t)| = 0$ pour tout $t \in [t_0,t_1]$ par le lemme de Gronwall 3.5.1.

2. Montrons à présent l'existence locale d'une solution. Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe une solution de (5.1.2) sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \alpha]$ pour tout $\alpha < \min\{K^{-1}, t_1 - t_0\}$. Pour celà, on considère l'opérateur

$$T \ : \ \left(C([t_0,t_0+\alpha], I\!R^n), \|.\|_\infty\right) \ \longrightarrow \ \left(C([t_0,t_0+\alpha], I\!R^n), \|.\|_\infty\right)$$

défini par :

$$Tx(t) \ := \ x_0 + \int_{t_0}^t f\left(s, x(s), u(s)\right) ds \ ; \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \ .$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\|_\infty &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s), u(s)) - f(s, y(s), u(s))| \; ds \\ &\leq K\alpha \|x - y\|_\infty \, .\end{aligned}$$

Comme $\alpha < K^{-1}$, ceci prouve que T est contractant et possède, par conséquent, un unique point fixe.

3. Pour finir la démonstration, il reste à montrer l'existence d'une solution maximale sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. Cette partie de la démonstration utilise la condition de croissance linéaire sur f, et ne diffère en aucun point de la démonstration classique dans le cas où u est continu, voir par exemple Shwartz [5], théorème 4.2.10. □

5.2 Un résultat d'existence

L'ingrédient principal pour le résultat d'existence suivant est le critère de compacité d'Ascoli. Rappelons qu'une partie H de $C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ est dite *équicontinue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } (t, s) \in [t_0, t_1]^2 \;:\quad |t - s| \leq \eta \longrightarrow \sup_{h \in H} |h(t) - h(s)| \;\leq\; \varepsilon \, .$$

Théorème 5.2.1 (Ascoli) *Soit H un sous-ensemble de $C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Si H est équicontinu et uniformément borné, alors H est relativement compact dans $C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ au sens de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$.*

Le lemme suivant montre que le critère de compacité d'Ascoli s'applique naturellement dans notre cadre.

Lemme 5.2.1 *Supposons que U soit borné et que la fonction f vérifie la deuxième condition (de croissance linéaire) de* (5.1.1)*. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|x^u\|_\infty \;\leq\; C \;\; et \; x^u \quad est \; C\text{−}Lipschitzienne \; pour \; tout \quad u \in \mathcal{U} \, .$$

En particulier, la famille $\{x^u \;\; : \in \mathcal{U}\}$ est un sous-ensemble équicontinu et uniformément borné de $C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Il suffit d'estimer directement pour $t_0 \leq s \leq t \leq t_1$:

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(s)| &\leq \int_s^t |f(r, x(r), u(r))| \, dr \\
&\leq K \int_s^t (1 + |x(r) - x(s)| + |x(s)| + |u(r)|) \, dr \quad (5.2.1) \\
&\leq K_1 \left[1 + \int_s^t (|x(r) - x(s)| + |x(s)|) \, dr \right] ,
\end{aligned}$$

d'après la bornitude de U. Pour $s = t_0$, ceci montre que

$$|x(t) - x_0| \leq K_2 \left(1 + \int_s^t |x(r) - x_0| dr \right) ,$$

pour une certaine constante $K" > 0$, et on obtient une borne uniforme pour $x(.)$ en utilisant le lemme de Gronwall 3.5.1. On déduit alors de (5.2.1) que :

$$|x(t) - x(s)| \leq K_3 |t - s| dr ,$$

prouvant ainsi l'équicontinuité de la famille $\{x^u \ : u \in \mathcal{U}\}$. □

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer un résultat d'existence pour le problème 5.0.1.

Théorème 5.2.2 *Supposons que U est compact, G est continu, f vérifie les conditions de Lipschitz et de croissance linéaire* (5.1.1), *et que l'ensemble*

$$N(t, x) := \{ f(t, x, \nu) \ : \ \nu \in U \}$$

est convexe pour tout $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Alors, le problème d'optimisation dynamique 5.0.1 admet une solution, i.e. il existe une variable de contrôle $u^* \in \mathcal{U}$ telle que $V = G\left(x^{u^*}(t_1)\right)$.

Démonstration. 1. Soit $(u^n)_{n \geq 0}$ une suite minimisante pour le problème (5.0.1), i.e.

$$u^n \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} G\left(x^n(t_1)\right) ,$$

où on a noté $x^n := x^{u^n}$. D'après le lemme 5.2.1 et le critère de compacité d'Ascoli, on déduit l'existence d'une sous-suite, que l'on continuera à désigner par $(x^n)_{n\geq 0}$, et d'une fonction continue x^* telles que

$$x^n \longrightarrow x^* \quad \text{uniformément sur} \quad [t_0, t_1] \ .$$

Comme G est continu, on a $V = G(x^*(t_1))$. Pour finir la démonstration du théorème, il reste à trouver une variable de contrôle $u^* \in \mathcal{U}$ telle que $x^* = x^{u^*}$.

2. D'après le lemme 5.2.1, x^n est $C-$Lipschtzienne pour tout n. Cette propriété étant préservée par passage à la limite uniforme, on déduit que x^* est absoluement continue. Ainsi $\dot{x}^*$ existe presque partout et

$$x^*(t) \ = \ x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}^*(s)ds \quad \text{pour} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \ .$$

3. Montrons à présent que $\dot{x}^*(t) \in N^*(t) := N(t, x^*(t))$ p.p. Commençons par remarquer que, pour tout paramètre $a > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{O}_a \ := \ \{x \in I\!\!R^n \ : \ \text{dist}(x, N^*(t)) < a\}$$

est convexe, comme conséquence de la convexité de $N^*(t)$. Comme la fonction f est uniformément continue sur le compact $[t_0, t_1] \times \{|\xi| \leq C\} \times U \subset [t_0, t_1] \times I\!\!R^n \times U$, il existe $\eta_a > 0$, tel que $\eta_a \longrightarrow 0$ quand $a \to 0$ et :

$$|s - t| + |\xi - x^*(t)| \ < \ 3\eta_a \quad \Longrightarrow \quad N(s, \xi) \ \subset \ \mathcal{O}_a \ .$$

D'après la convergence uniforme de x^n vers x^* et le fait que x^* est $C-$Lipschitzienne, on voit que pour $|s - t| \leq \delta_a := \eta_a \min\{1, C^{-1}\}$ et $n \geq N_a$ suffisamment grand :

$$|x^n(s) - x^*(s)| \ \leq \ \eta_a \quad \text{et} \quad |x^*(s) - x^*(t)| \ \leq \ \eta_a \ .$$

On en déduit que $|s - t| + |x^n(s) - x^*(s)| \leq \eta_a$, et par suite

$$N(s, x^n(s)) \ \subset \ \mathcal{O}_a \quad \text{pour} \quad |s - t| \leq \delta_a \text{ et } n \geq N_a \ .$$

4. D'après la convergence uniforme de x^n vers x^*, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x^*(t+h)-x^*(t)}{h} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^n(t+h)-x^n(t)}{h} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\left(s, x^n(s), u^n(s)\right) ds \ .\end{aligned}$$

Pour $h \leq \delta_a$, on déduit de l'étape précédente que $f\left(s, x^n(s), u^n(s)\right) \in N\left(s, x^n(s)\right) \subset \mathcal{O}_a$ pour tout $s \in [t, t+h]$. Comme $\mathcal{O}_a$ est convexe, on voit que

$$\frac{x^*(t+h)-x^*(t)}{h} \in \overline{\mathcal{O}}_a \ ,$$

et par suite $\dot{x}^*(t) \in \overline{\mathcal{O}}_a$ pour presque tout $t \in [t_0, t_1]$. Comme le paramètre $a > 0$ est arbitraire, on en déduit que

$$\dot{x}^*(t) \ \in \ N^*(t) \ = \ N\left(t, x^*(t)\right) \ .$$

5. Par définition de l'ensemble $N\left(t, x^*(t)\right)$, on a ainsi montré que $\dot{x}^*(t) = f\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)$ pour un certain $u^*(t) \in U$. Pour montrer que $u^* \in \mathcal{U}$, il reste à faire appel à un théorème de *sélection mesurable* pour assurer la possibilité de choisir une telle fonction u^* qui soit de plus mesurable... $\square$

Bibliography

[1] Demange G. et Rochet J.-C. (1992), *Méthodes Mathématiques de la Finance*, Economica.

[2] Fleming W.H. et Rishel R.W. (1975), *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag.

[3] Fleming W.H. et Soner H.M. (1993), *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag.

[4] Kamien, M.I. et Schwartz N.L. (1991), *Dynamic Optimization: the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management* (2ème edition), North Holland, New-York.

[5] Schwatrz L. (1997), *Analyse II : Calcul différentiel et équations différentielles*, Collection Enseignement des Sciences, Hermann.

[6] Vieille N. (2000), *Optimisation Dynamique*, Polycopié ENSAE.