UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE
UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008
Cours d'économétrie – L3 Economie

Cours de Valérie MIGNON
TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

TD d'économétrie

TD 1. Introduction. Les différents types de données

TD 2. Le modèle de régression simple. Une application en séries temporelles

TD 3. Le modèle de régression multiple. Définition et propriétés statistiques

TD 4. Les tests

Sujet d'examen de septembre 2007

Annexe 1. Algèbre linéaire

Annexe 2. Rappels de statistique

Annexe 3. Tables statistiques

UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE
UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008 — Cours de Valérie MIGNON
Cours d'économétrie – L3 Economie — TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

TD 1 – Introduction
Les différents types de données

Exercice 1 : Données en coupe

On considère les deux séries de données suivantes :

- Le niveau d'éducation, mesuré par le nombre d'années de scolarité,
- Le salaire horaire moyen en dollars US.

Ces séries concernent l'année 1985 aux Etats-Unis et sont reportées dans le tableau 1.1.

On note *X* le niveau d'éducation et *Y* le salaire moyen.

Tableau 1.1. Données

	Années de scolarité X	Salaire moyen Y
	6	4,4567
	7	5,77
	8	5,9787
	9	7,3317
	10	7,3182
	11	6,5844
	12	7,8182
	13	7,8351
	14	11,0223
	15	10,6738
	16	10,8361
	17	13,615
	18	13,531
Somme		112,7712

On donne par ailleurs les informations suivantes :

$\sum Y^2 = 1083{,}37552$, $\sum XY = 1485{,}04$

1. On considère la série de salaire moyen *Y*. Calculer la moyenne, la variance, la variance empirique, l'écart-type et l'écart-type empirique de cette série.

2. Calculer la covariance entre *X* et *Y*.

3. En déduire la valeur du coefficient de corrélation entre *X* et *Y*. Commenter. Ce résultat semble t-il logique ?

4. La figure 1.1. reporte le nuage de points du couple (X,Y). Que peut-on en déduire ?

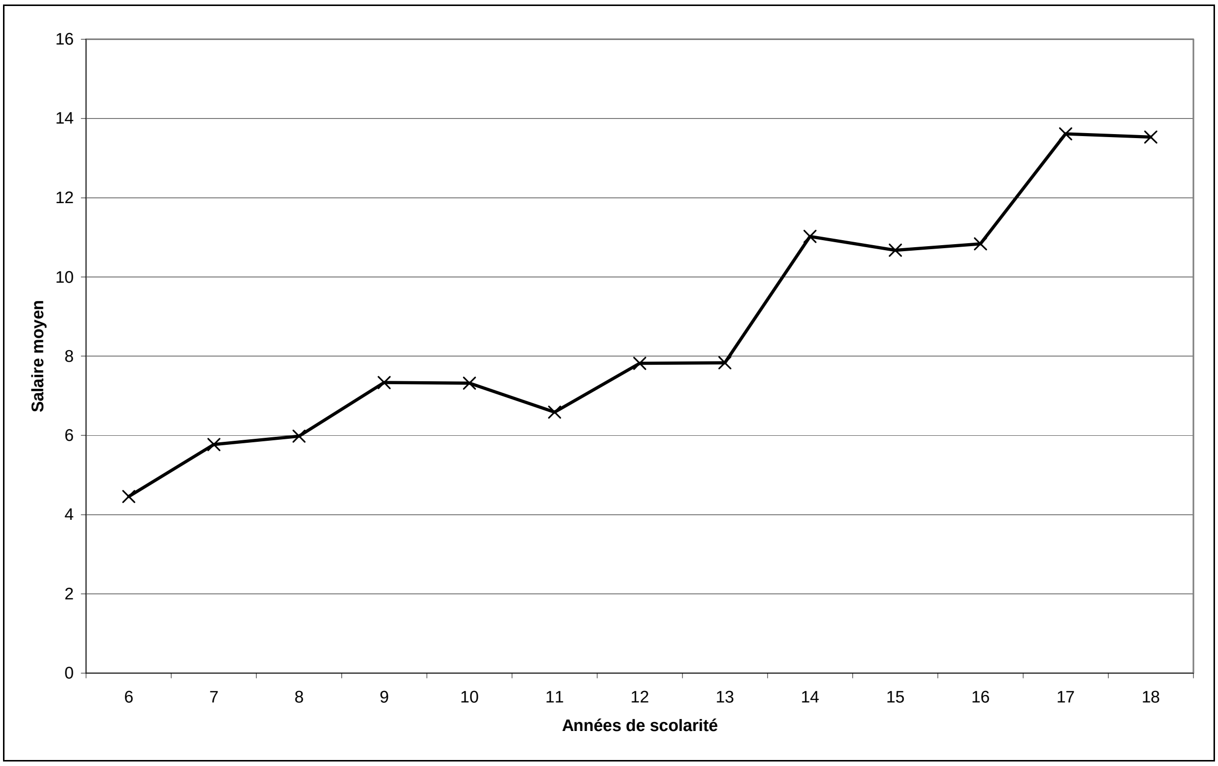

Figure 1.1. Nuage de points (années de scolarité, salaire moyen).

5. Supposons que l'on cherche à établir une relation entre X et Y. Quelle serait alors la variable expliquée et quelle serait la variable explicative ?

6. L'estimation d'une telle relation nous donne : $\hat{Y} = -0,0144 + 0,9078X$, où $\hat{Y}$ désigne la valeur estimée de Y. Commenter cette relation.

Exercice 2 : Séries temporelles

On considère les séries de consommation et de revenu disponible brut des ménages canadiens, exprimées en milliards de dollars canadiens. Les données figurent dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1. Données

	CONSO	REVENU		CONSO	REVENU
1997.1	500,816	839,236	2002.1	639,104	1091,3
1997.2	507,332	851,376	2002.2	652,708	1121,63
1997.3	514,12	859,8	2002.3	660,3	1133,96
1997.4	520,512	872,496	2002.4	670,776	1149,2
1998.1	521,748	879,848	2003.1	678,52	1182,56
1998.2	529,884	881,8	2003.2	682,3	1165,36
1998.3	534,696	881,132	2003.3	692,452	1188,24
1998.4	538,348	898,732	2003.4	692,68	1201,96
1999.1	547,62	919,18	2004.1	706,98	1229,76
1999.2	556,012	942,608	2004.2	715,844	1259,12
1999.3	565,74	964,568	2004.3	723,744	1280,45
1999.4	574,164	973,716	2004.4	732,908	1287,11
2000.1	582,444	1013,87	2005.1	745,616	1309,08
2000.2	590,496	1042,16	2005.2	756,184	1332,71
2000.3	602,62	1065,6	2005.3	765,928	1363,96
2000.4	608,476	1077,04	2005.4	773,792	1387,24
2001.1	612,796	1087,2	2006.1	785,916	1399,12
2001.2	620,312	1088,48	2006.2	797,132	1410,39
2001.3	621,952	1073,04	2006.3	805,632	1423,28
2001.4	627,396	1064,4			

1. Préciser la période d'étude, la fréquence des données ainsi que le nombre d'observations.

2. La figure 2.1. reproduit l'évolution des deux séries. Que peut-on déduire d'un tel graphique ?

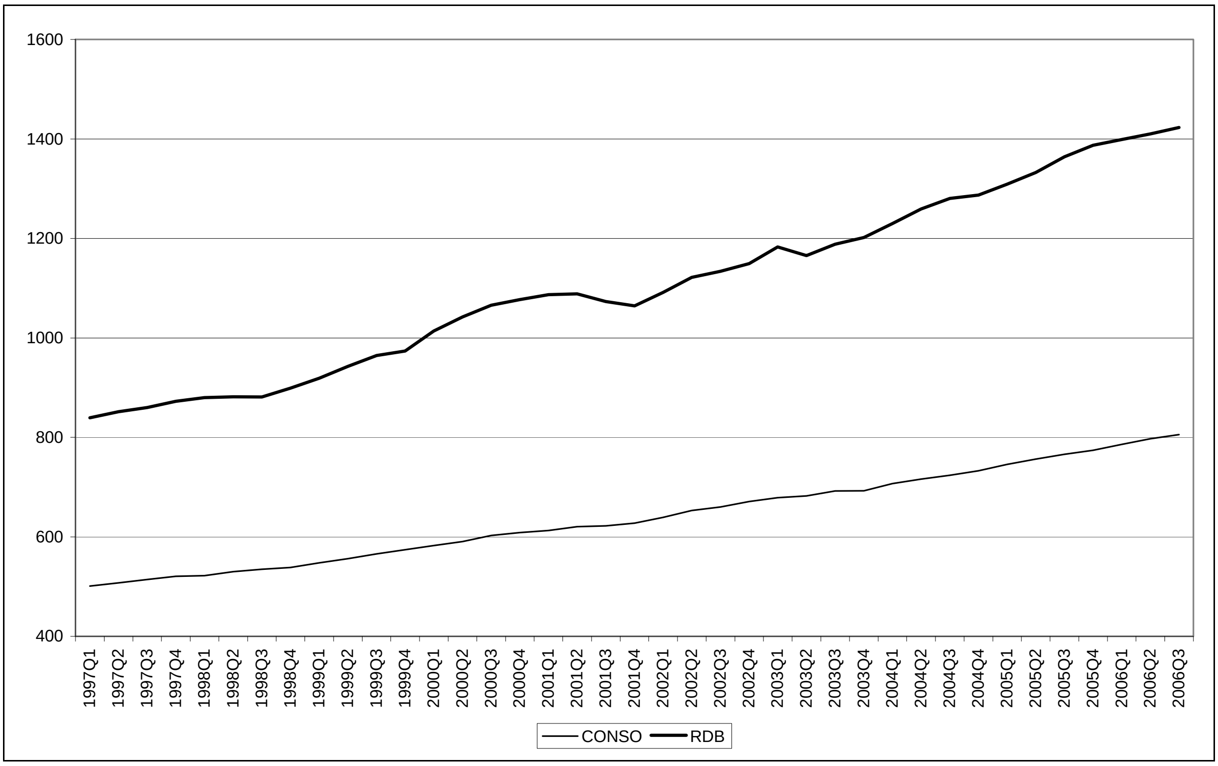

Figure 2.1. Evolution de la consommation et du revenu disponible brut.

3. La figure 2.2. reporte le nuage de points concernant le couple (REVENU, CONSOMMATION). Commenter.

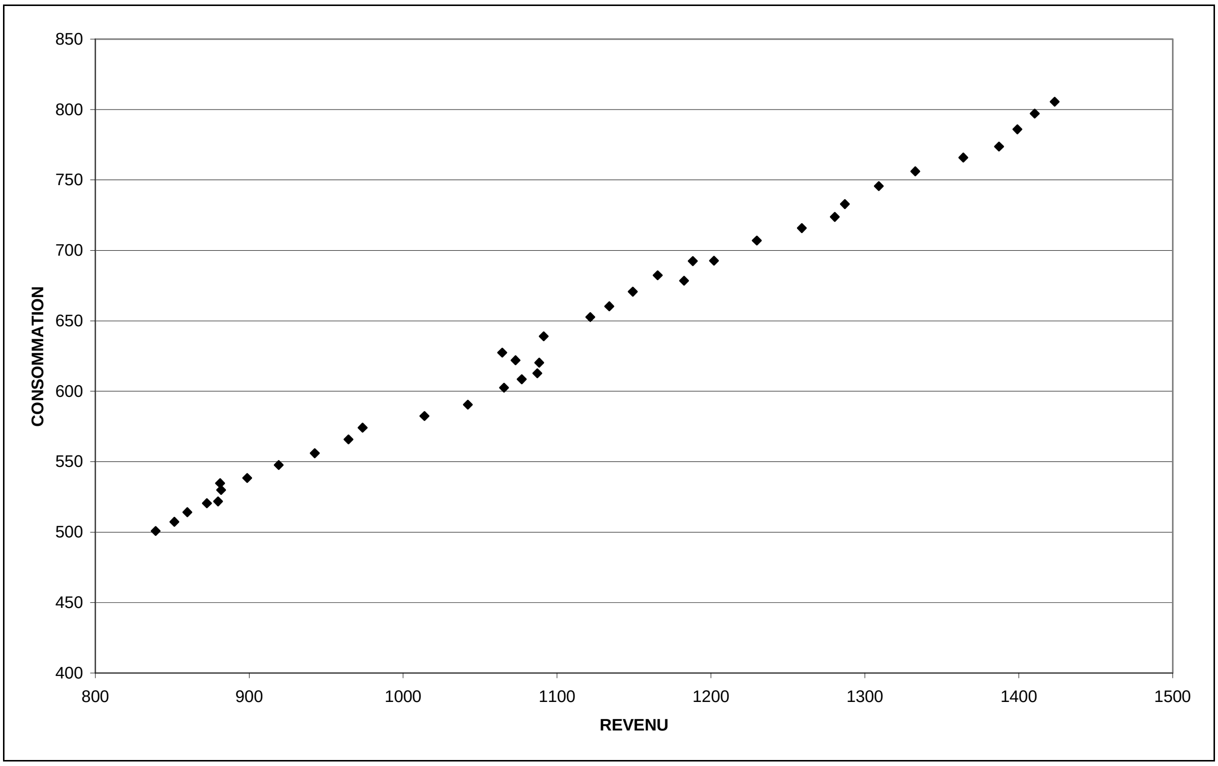

Figure 2.2. Nuage de points, couple (REVENU, CONSOMMATION).

4. On cherche à expliquer la consommation par le revenu. L'estimation du modèle linéaire liant les deux variables donne : $\hat{C} = 74{,}6408 + 0{,}5104R$, où $\hat{C}$ désigne la consommation estimée et R le revenu.
Commenter cette relation de façon détaillée.

Exercice 3 : Données de panel

On considère un panel composé de 6 pays : Canada, France, Italie, Japon, Royaume-Uni et Etats-Unis. Pour ce panel, on dispose des indices des prix à la consommation sur la période 1980 – 2005. Les séries, reproduites dans le tableau 3.1., sont exprimées en base 100 en 2000.

Tableau 3.1. Données

	Canada	France	Italie	Japon	Royaume Uni	USA
1980	46,1643	45,7827	27,6941	75,1793	39,2658	47,8513
1981	51,9175	51,887	32,6221	78,8719	43,9305	52,7875
1982	57,5263	58,1023	37,9666	81,032	47,7044	56,0395
1983	60,8721	63,5985	43,5193	82,5644	49,9021	57,8397
1984	63,5132	68,4789	48,2391	84,4229	52,374	60,3368
1985	66,0226	72,472	52,6813	86,151	55,5507	62,4855
1986	68,7783	74,3117	55,7353	86,6808	57,4547	63,6469
1987	71,7804	76,7558	58,3728	86,7868	59,8385	66,0279
1988	74,6679	78,8288	61,3574	87,3492	62,7753	68,675
1989	78,3976	81,5865	65,1749	89,3463	67,6701	71,9899
1990	82,133	84,3441	69,4088	92,0851	74,0822	75,8759
1991	86,7449	87,0574	73,7816	95,0929	78,419	79,0892
1992	88,0512	89,117	77,5296	96,7232	81,3461	81,4847
1993	89,6725	90,9938	81,0001	97,954	82,6187	83,8899
1994	89,8386	92,5051	84,2623	98,6306	84,6647	86,0772
1995	91,7866	94,15	88,6813	98,5083	87,5526	88,4921
1996	93,2325	96,0408	92,206	98,6387	89,6965	91,0859
1997	94,7446	97,1936	94,0898	100,383	92,5061	93,2153
1998	95,6797	97,8474	95,9368	101,052	95,6681	94,6622
1999	97,3268	98,3366	97,5251	100,717	97,1561	96,7334
2000	100	100	100	100	100	100
2001	102,532	101,663	102,785	99,2419	101,821	102,826
2002	104,837	103,62	105,319	98,3534	103,485	104,457
2003	107,736	106,115	108,134	98,1089	106,5	106,828
2004	109,711	108,513	110,52	98,1007	109,657	109,688
2005	112,162	110,396	112,714	97,8318	112,761	113,41

1. Quelle est la fréquence des données ? Quel est le nombre d'individus du panel ?

2. Le tableau 3.2. reporte le taux d'inflation pour chacun des pays (en pourcentage). Comment ces données ont-elles été déduites du tableau 3.1. ? Quelle autre formule pourrait-on également utiliser pour calculer la série d'inflation ? Expliquer.

Tableau 3.2. Taux d'inflation

	Canada	France	Italie	Japon	Royaume Uni	USA
1981	12,4624	13,3332	17,7944	4,9117	11,8798	10,3157
1982	10,8033	11,9785	16,3831	2,7387	8,5906	6,1605
1983	5,8161	9,4595	14,6252	1,8911	4,6069	3,2124
1984	4,3388	7,6738	10,8453	2,2510	4,9535	4,3173
1985	3,9510	5,8311	9,2087	2,0470	6,0654	3,5612
1986	4,1739	2,5385	5,7971	0,6150	3,4275	1,8587
1987	4,3649	3,2890	4,7322	0,1223	4,1490	3,7410
1988	4,0227	2,7008	5,1130	0,6480	4,9079	4,0091
1989	4,9951	3,4983	6,2217	2,2863	7,7973	4,8269
1990	4,7647	3,3800	6,4962	3,0654	9,4755	5,3980
1991	5,6152	3,2169	6,3001	3,2663	5,8540	4,2349
1992	1,5059	2,3658	5,0799	1,7144	3,7326	3,0289
1993	1,8413	2,1060	4,4764	1,2725	1,5644	2,9517
1994	0,1852	1,6609	4,0274	0,6907	2,4764	2,6073
1995	2,1683	1,7782	5,2443	-0,1240	3,4110	2,8055
1996	1,5753	2,0083	3,9746	0,1324	2,4487	2,9311
1997	1,6219	1,2003	2,0430	1,7684	3,1323	2,3378
1998	0,9870	0,6727	1,9630	0,6664	3,4182	1,5522
1999	1,7215	0,5000	1,6556	-0,3315	1,5554	2,1880
2000	2,7466	1,6915	2,5377	-0,7119	2,9271	3,3769
2001	2,5320	1,6630	2,7850	-0,7581	1,8210	2,8260
2002	2,2481	1,9250	2,4653	-0,8953	1,6342	1,5862
2003	2,7652	2,4078	2,6728	-0,2486	2,9135	2,2698
2004	1,8332	2,2598	2,2065	-0,0084	2,9643	2,6772
2005	2,2341	1,7353	1,9852	-0,2741	2,8306	3,3933

3. La figure 3.1. reporte les taux d'inflation de chaque pays. Que peut-on dire quant à l'allure générale des taux d'inflation ?

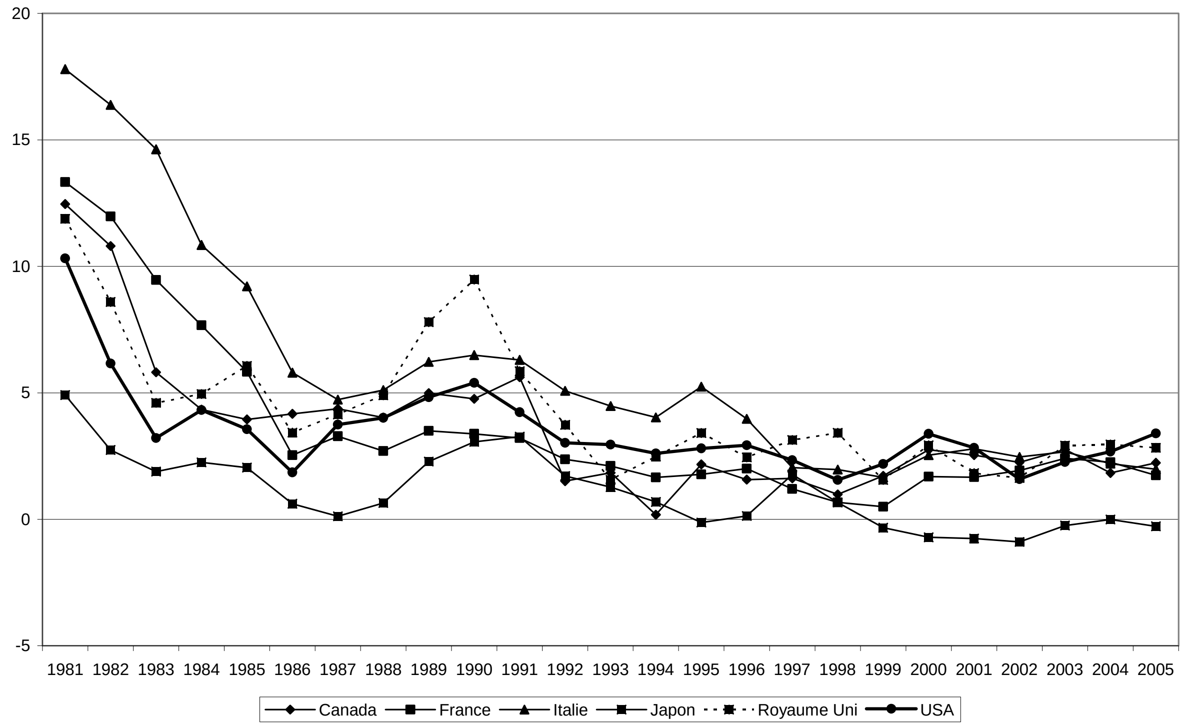

Figure 3.1. Taux d'inflation.

4. Au vu du graphique, quel est le pays pour lequel le taux d'inflation est le plus variable ? Quel est le pays pour lequel le taux d'inflation est le moins variable ?

5. Ce dernier résultat vous semble-t-il confirmé par les statistiques descriptives figurant dans le tableau 3.3. ? Commenter.

Tableau 3.3. Statistiques descriptives

	Canada	France	Italie	Japon	Royaume Uni	USA
Min	0,1852	0,5000	1,6556	-0,8953	1,5554	1,5522
Max	12,4624	13,3332	17,7944	4,9117	11,8798	10,3157
Max-Min	12,2772	12,8332	16,1388	5,8070	10,3244	8,7635
Moyenne	3,6509	3,6350	5,8653	1,0694	4,3415	3,5267
Ecart-type empirique	2,8383	3,3988	4,5479	1,4824	2,6463	1,8086
Coeff. Variation	0,7774	0,9350	0,7754	1,3862	0,6095	0,5128

UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE
UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008 | Cours de Valérie MIGNON
Cours d'économétrie – L3 Economie | TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

TD 2 - Le modèle de régression simple
Une application en séries temporelles

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du revenu disponible brut et de la consommation des ménages en euros pour un pays donné sur la période 1992-2001.

Année	Revenu	Consommation
1992	8000	7389,99
1993	9000	8169,65
1994	9500	8831,71
1995	9500	8652,84
1996	9800	8788,08
1997	11000	9616,21
1998	12000	10593,45
1999	13000	11186,11
2000	15000	12758,09
2001	16000	13869,62

On cherche à expliquer la consommation des ménages (*C*) par le revenu (*R*), soit :

$$C_t = \alpha + \beta R_t + \varepsilon_t$$

1. Tracer le nuage de points et commenter. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les séries de consommation et de revenu.
2. Calculer les estimateurs des moindres carrés ordinaires $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$.
3. En déduire les valeurs estimées $\hat{C}_t$ de C_t.
4. Calculer les résidus et vérifier la propriété selon laquelle la moyenne des résidus est nulle.
5. Calculer l'estimateur de la variance de l'erreur, noté $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$.
6. Le coefficient β, représentant la propension marginale à consommer, est-il significativement différent de zéro ?
7. Construire l'intervalle de confiance au seuil de 95% pour ce même cœfficient.
8. Calculer le coefficient de détermination et effectuer le test de Fisher permettant de déterminer si la régression est significative dans son ensemble.
9. Ecrire et vérifier l'équation d'analyse de la variance. Interpréter.
10. En 2002 et 2003, on prévoit respectivement 16800 et 17000 euros pour la valeur du revenu. Déterminer les valeurs prévues de la consommation pour ces deux années, ainsi que l'intervalle de prévision au seuil de 95%.

UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE
UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008 | Cours de Valérie MIGNON
Cours d'économétrie – L3 Economie | TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

TD 3 - Le modèle de régression multiple
Définition et propriétés statistiques

Exercice 1

Soit le modèle linéaire multiple :

$$\underset{(T,1)}{y} = \underset{(T,k)}{X}\underset{(k,1)}{b} + \underset{(T,1)}{u}$$

On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} H1 &: E(u) = 0 \\ H2 &: X \text{ certaine} \\ H3 &: Rg(X) = k \\ H4 &: E(uu') = \sigma^2 I_T \end{aligned}$$

- a. Expliquer l'écriture du modèle et le sens des hypothèses.
- b. On définit $\hat{b}$, estimateur des M.C.O., comme solution des équations normales. Expliquer le contenu théorique de ces équations, pourquoi on les utilise pour définir un estimateur de b. Donner l'expression de $\hat{b}$. À quelle condition est-il défini de manière unique?
- c. Calculer $E(\hat{b})$ et $V(\hat{b})$. Quelle propriété a $V(\hat{b})$? Comment estime t-on $V(\hat{b})$?

Exercice 2

Soit le modèle linéaire multiple :

$$\underset{(T,1)}{y} = \underset{(T,k)}{X}\underset{(k,1)}{b} + \underset{(T,1)}{u}$$

On suppose vérifiées les hypothèses $H1$, $H2$ et $H3$. En revanche, on suppose que la matrice de variance-covariance des perturbations est quelconque : $E(uu') = \Omega \neq \sigma^2 I_T$. Soit $\hat{b}$ l'estimateur des M.C.O. de b.

- a. Calculer $E(\hat{b})$
- b. Calculer $V(\hat{b})$. Que peut-on dire de $V(\hat{b})$?
- c. À quoi correspond la matrice $\sigma^2(X'X)^{-1}$?

Exercice 3

Analyser les différents modèles qui suivent et déterminer les hypothèses, parmi $H1$, $H2$, $H3$ et $H4$ qui ne sont pas respectées dans ces modèles :

- a. Modèle de demande de travail avec inertie de l'emploi :

$$l_t = aq_t + bw_t + cl_{t-1} + u_t$$

  où l, q et w désignent les logarithmes de l'emploi, de la production et du salaire.

- b. Fonction de production de Cobb-Douglas :

$$q_t = \alpha l_t + \beta k_t + \gamma t + c_1 \mathbb{I}_{1t} + c_2 \mathbb{I}_{2t} + \delta + u_t \quad t = 1960, \ldots, 1980$$

  où l, q et k désignent les logarithmes de l'emploi, de la production et du capital.

$$\mathbb{I}_{1t} = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leq 1973 \\ 0 \text{ si } t > 1973 \end{cases} \qquad \mathbb{I}_{2t} = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 1973 \\ 0 \text{ si } t \leq 1973 \end{cases}$$

  $\mathbb{I}_{1t}$ et $\mathbb{I}_{2t}$ sont appelées "variables indicatrices" ou "variables dummy" ou "dummies" ou "variables muettes". À quoi servent-elles?
  Quelle hypothèse n'est pas respectée? Comment y remédier?

- c. Fonction d'investissement en terme d'accélérateur-profit :

$$\left(\frac{I}{K}\right)_t = \sum_{\tau=1}^{\tau=6} a_\tau \dot{q}_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^{\tau=5} b_\tau \Pi_{t-\tau} + c + u_t \quad t = 1960, \ldots, 1970 \text{ Données annuelles}$$

  $(\frac{I}{K})$, $\dot{q}$ et Π désignent le taux d'accumulation, le taux de croissance de la production et le taux de profit. La spécification est ici sous la forme de retards échelonnés pour rendre compte des processus d'anticipation.

- d. Fonction de production de Cobb-Douglas :

$$q_t = \alpha l_t + \beta k_t + \gamma t + \delta + u_t$$

  On suppose que u_t incorpore les variations, relativement cycliques, du taux d'utilisation des capacités, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} u_t &= \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad \rho > 0 \\ E(\epsilon_t) &= 0 \\ E(\epsilon_t^2) &= \sigma_\epsilon^2 \\ E(\epsilon_t \epsilon_{t'}) &= 0 \text{ si } t \neq t' \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit l'échantillon de taille $T=5$:

y_t	x_{1t}	x_{2t}	x_{3t}
8	3	6	-3
2	1	2	-1
6	3	6	3
0	1	2	1
4	2	4	0
$\sum y_t$=20	$\sum x_{1t}$=10	$\sum x_{2t}$=20	$\sum x_{3t}$=0

- a. Quel est le problème posé par l'estimation du modèle :

$$y_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 + u_t$$

Comment le résoudre?

- b. Soit le modèle :

$$\begin{aligned} y_t &= b_1 x_{1t} + b_2 + v_t \\ E(v_t) &= 0 \quad \forall t \\ E(v_t^2) &= \sigma_v^2 \quad \forall t \end{aligned}$$

Soit $\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}$ Estimer b, σ_v^2 et $V(\hat{b})$

- c. Soit le modèle :

$$\begin{aligned} y_t &= c_1 x_{1t} + c_2 x_{3t} + c_3 + w_t \\ E(w_t) &= 0 \quad \forall t \\ E(w_t^2) &= \sigma_w^2 \quad \forall t \end{aligned}$$

Soit $\hat{c} = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \end{pmatrix}$ Estimer c. Comparer $\hat{b}$ et $\hat{c}$. Expliquer.

Exercice 5

Problèmes liés à l'unité de mesure des variables

Soient les modèles :

$$\begin{aligned} y_t &= bx_t + u_t \\ y_t &= \beta\tilde{x}_t + v_t \\ t &= 1, \ldots, T \end{aligned}$$

où y_t et x_t sont centrées (pourquoi?)
$\tilde{x}_t$ est la même variable que x_t mais mesurée différemment ; on a ainsi $\tilde{x}_t = 1000x_t$ (par exemple x_t est mesurée en milliers de francs et $\tilde{x}_t$ en francs).

- a. Comparer $\hat{b}$ et $\hat{\beta}$.
  Montrer que la modification du coefficient estimé n'a en fait aucune conséquence sur les résultats d'une simulation : admettons par exemple que y_t corresponde à la consommation des ménages et x_t à leur revenu disponible, quelle est la conséquence d'allègements fiscaux conduisant à une augmentation du revenu disponible de 5 milliards de francs?
- b. Soit un troisième modèle :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t &= \gamma x_t + w_t \quad t = 1, \ldots, T \\ \text{où } \tilde{y}_t &= 1000y_t \end{aligned}$$

  Quel est l'impact du changement d'unité de mesure de y sur les résultats des estimations et des simulations?
- c. On compare maintenant les modèles :

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha x_t + \beta z_t + u_t \\ y_t &= a\tilde{x}_t + bz_t + v_t \\ t &= 1, \ldots, T \end{aligned}$$

  où y_t, x_t et z_t sont centrées et $\tilde{x}_t = 1000x_t$. Comparer $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$.
  Quel est l'impact du changement d'unité de mesure sur les simulations?
- d. On estime une fonction de production de SOLOW (fonction de Cobb-Douglas avec progrès technique incorporé au capital) et on obtient :

$$q_t - l_t = \underset{(0.009)}{0.344}(k_t - l_t) - \underset{(0.003)}{0.024}A_t + \underset{(0.002)}{0.036}t + \underset{(0.04)}{2.38} \quad R^2 = 0.6$$

  où q_t, l_t, k_t et A_t désignent respectivement les logarithmes de la production, de l'emploi, du capital d'une part, l'âge du capital d'autre part.
  Peut-on déduire de ce genre de résultat que l'intensité capitalistique a plus d'influence sur la productivité apparente du travail que l'âge du capital?

Exercice 6

Introduction d'une dummy

On veut estimer, sur données trimestrielles françaises, une équation de salaire inspirée de la courbe de Phillips :

$$\dot{w}_t = \sum_{\tau=0}^{3} a_\tau \dot{p}_{t-\tau} + btcho_t + c + u_t \quad t = 1950.1, \ldots, 1990.4$$

où $\dot{w}_t$ et $\dot{p}_t$ sont les taux de croissance du salaire par tête (nominal) et du niveau du prix de la consommation, $tcho_t$ est le taux de chômage en t.

- a. À quoi sont égaux T, le nombre d'observations et k, le nombre de variables explicatives.
- b. On pense que le point correspondant à $t = 1982.3$ est aberrant et doit être éliminé. Pourquoi ?
- c. Pour éliminer ce point, il suffit d'introduire une variable explicatice supplémentaire dans la régression, notée $\mathbb{I}_{82.3}$, telle que :

$$\mathbb{I}_{82.3} = \begin{cases} 1 \text{ si } t = 1982.3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour démontrer ce résultat, on propose de raisonner d'abord sur un modèle très simple, avant de procéder à une généralisation.

1. Soit le modèle :

$$y_t = bx_t + u_t \quad x_t \text{ et } y_t \text{ centrés} \tag{6}$$
$$t = 1950.1, \ldots, 1990.4 \tag{7}$$

   Montrer en calculant directement l'estimation, qu'estimer le modele 8

$$y_t = bx_t + c\mathbb{I}_{82.3} + v_t \tag{8}$$

   revient à estimer le modèle 6 en supprimant l'observation $t = 1982.3$.

2. Généraliser ce résultat au cas général d'un modèle avec k variables explicatives (par exemple l'équation de salaire ci-dessus).

UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008 | Cours de Valérie MIGNON
Cours d'économétrie – L3 Economie | TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

TD 4 – Les tests

Exercice 1

Un modèle trimestriel du système monétaire français explique la demande de refinancement des banques (RF) par :

- un indicateur de la rentabilité des crédits donnés par les banques ρ.
- les réserves exogènes des banques (REX).
- les réserves obligatoires (RO).

Les données utilisées vont du premier trimestre 1962 au dernier trimestre 1972 : $t = 1962.1, \ldots, 1972.4$ $T = 44$.

- a. On obtient tout d'abord le résultat suivant :

$$\log(RF) = \underset{(0{,}032)}{0,054^*}\rho - \underset{(0{,}196)}{0,332^*}\log(REX) + \underset{(0{,}044)}{0,402}\log(RO) + \underset{(0{,}867)}{3,797}$$

(Les écarts-types estimés des coefficients estimés figurent, entre parenthèses, sous les coefficients estimés)

$$R^2 = 0,913 \quad SCR = 1,04 \quad DW = 0,834$$

Commenter tout d'abord, d'un point de vue économique, les résultats obtenus. Vous paraissent-ils vraisemblables ?

Tester aux seuils de 5% et 1% la significativité de chacun des coefficients, pris un par un.

Tester aux seuils de 5% et 1% l'hypothèse selon laquelle tous les coefficients seraient nuls, sauf la constante.

Vous expliquerez au préalable la construction de la statistique utilisée pour le test, et la loi qu'elle suit, sous l'hypothèse nulle. Pourquoi ce test n'est-il pas rigoureusement équivalent à un test de Student effectué, coefficient par coefficient, pour tous les coefficient sauf la constante ?

- b. On s'interroge sur la possibilité d'améliorer le modèle en introduisant deux variables explicatives supplémentaires :
  - une variable indicatrice de l'encadrement du crédit durant les années 1963 à 1965 (E).
  - une variable indicatrice des facilités de refinancement accordées aux 2ème et 3ème trimestre de 1968 (MAI).

On obtient :

$$\log(RF) = \underset{(0,032)}{0,086\rho} - \underset{(0,184)}{0,279^*}\log(REX) + \underset{(0,045)}{0,360}\log(RO) - \underset{(0,060)}{0,064^*}E + \underset{(0,072)}{0,187}MAI + \underset{(0,81)}{3,42}$$

$R^2 = 0,928 \qquad SCR = 0,836 \quad DW = 0,691$

décrire les vecteurs des observations des variables E et MAI. À quoi correspond leur introduction dans les variable explicatives ? À quoi correspondent leurs coefficients estimés ?

Comparer la valeur explicative des modèles estimés en a et b. Peut-on comparer les R^2 ? Calculer et commenter les valeurs des $\overline{R}^2$ et $\hat{\sigma}^2$ sur chaque modèle.

Tester l'hypothèse selon laquelle globalement E et MAI ne sont pas significativement explicatives.

- c. Expliquer le principe du test de Durbin-Watson et l'appliquer aux régressions effectuées en a et b.
  Quelles sont les conséquences de l'existence d'une autocorrélation des perturbations sur les estimations ? Quelles sont les hypothèses qui ne sont plus respectées ? Que valent les tests menés ci-dessus ?
- d. On pense que le phénomène étudié est affecté d'une forte saisonnnalité que l'on cherche à prendre en compte à l'aide de variables indicatrices des trimestres : TRIM1, TRIM2, TRIM3, TRIM4.

décrire les vecteurs des observations des variables TRIMi ($i = 1 \ldots 4$).

On obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\log(RF) = {} & \underset{(0,032)}{0,093\rho} - \underset{(0,184)}{0,222^*}\log(REX) + \underset{(0,045)}{0,347}\log(RO) - \underset{(0,066)}{0,069^*}E \\ & + \underset{(0,073)}{0,190}MAI - \underset{(0,063)}{0,086^*}TRIM1 - \underset{(0,064)}{0,024^*}TRIM2 - \underset{(0,064)}{0,117^*}TRIM3 + \underset{(0,81)}{3,215}\end{aligned}$$

$R^2 = 0,936 \qquad SCR = 0,770$

Pourquoi n'a-t-on pas introduit TRIM4 ?

Qu'aurait-on obtenu comme coefficients des dummies trimestrielles si on avait supprimé la constante et introduit TRIM1, TRIM2, TRIM3 et TRIM4 ?

On suppose H1, H2, H3, H4 et H6 vérifiées.

Comparer la valeur explicative des modèles estimés en b et d.

tester la significativité de chaque coefficient pris un par un.

Faire un test de Fisher (test de l'hypothèse : tous les coefficients sont nuls, sauf la constante).

Tester le significativité globale des coefficients saisonniers

Exercice 2

On veut estimer une fonction de production agrégée de type Cobb-Douglas pour les États-Unis sur des données annuelles 1929-1967. Le modèle estimé s'écrit :

$$\log Q_t = \hat{\gamma} + \hat{\alpha} \log L_t + \hat{\beta} \log K_t$$

où Q_t, L_t et K_t désignent, respectivement, le volume de l'output, l'emploi et le volume du capital. Une estimation par les MCO a fourni les résultats suivants (les statistiques t de Student sont indiquées en dessous des coefficients estimés) :

Période	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	R^2	$\sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{SCR}{T-k}}$
1929-1967	$-3,88$ (−15,2)	$1,41$ (15,9)	$0,42$ (8,24)	$0,9937$	$0,03755$
1929-1948	$-4,06$ (11,4)	$1,62$ (7,74)	$0,22$ (0,96)	$0,9759$	$0,04573$
1949-1967	$-1,96$ (−2,19)	$0,83$ (3,35)	$0,66$ (7,86)	$0,9904$	$0,02185$
1929-1965	$-3,94$ (16,3)	$1,44$ (17,0)	$0,39$ (7,85)	$0,9938$	$0,03538$

- a. Commenter ces différents résultats d'un point de vue économique.
- b. Faire les tests de significativité usuels (Student et Fisher).
- c. Que peut-on dire de la stabilité de la relation estimée?

UNIVERSITE PARIS X - NANTERRE
U.F.R. de Sciences Economiques, Gestion, Mathématiques et Informatique

L3 DE SCIENCES ECONOMIQUES
Second semestre

Session de septembre 2007
Cours de Valérie MIGNON

Examen d'Econométrie

Durée : 2h
Aucun document n'est autorisé

On considère les deux séries annuelles suivantes pour les Etats-Unis sur la période 1950-2005 :

- Le taux de chômage, noté CHO
- La variation du taux d'inflation, notée DINF

1. La figure 1 reproduit l'évolution des deux séries. Commenter de façon détaillée.

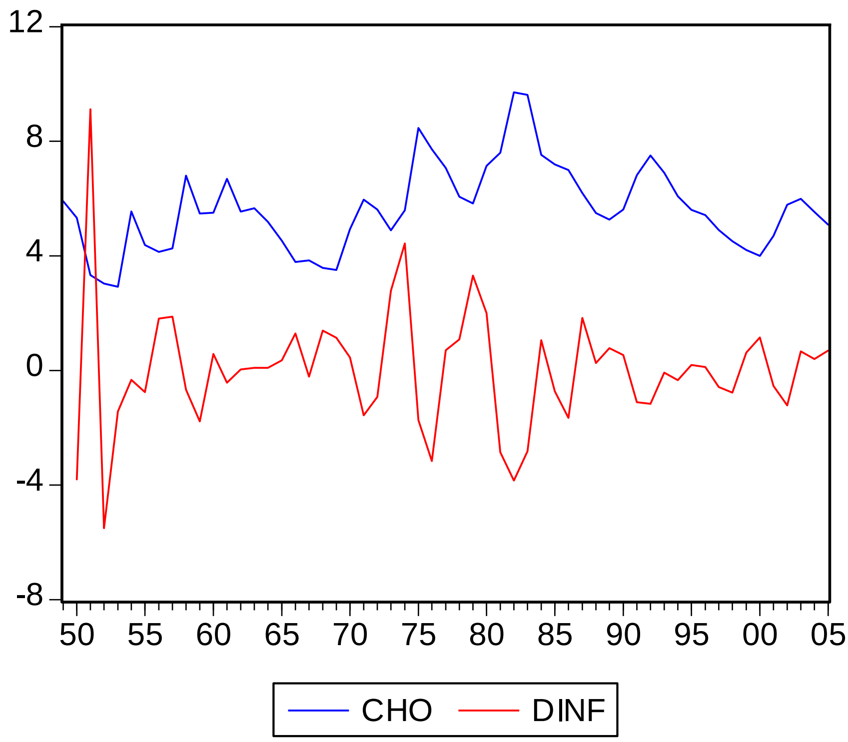

Figure 1. Evolution des séries CHO et DINF.

2. La figure 2 reporte le nuage de points (CHO,DINF). Commenter de façon détaillée ce graphique. A votre avis, quel type de relation peut-on mettre en évidence entre les deux variables ? A quel type de relation économique connue peut-on faire référence ici ?

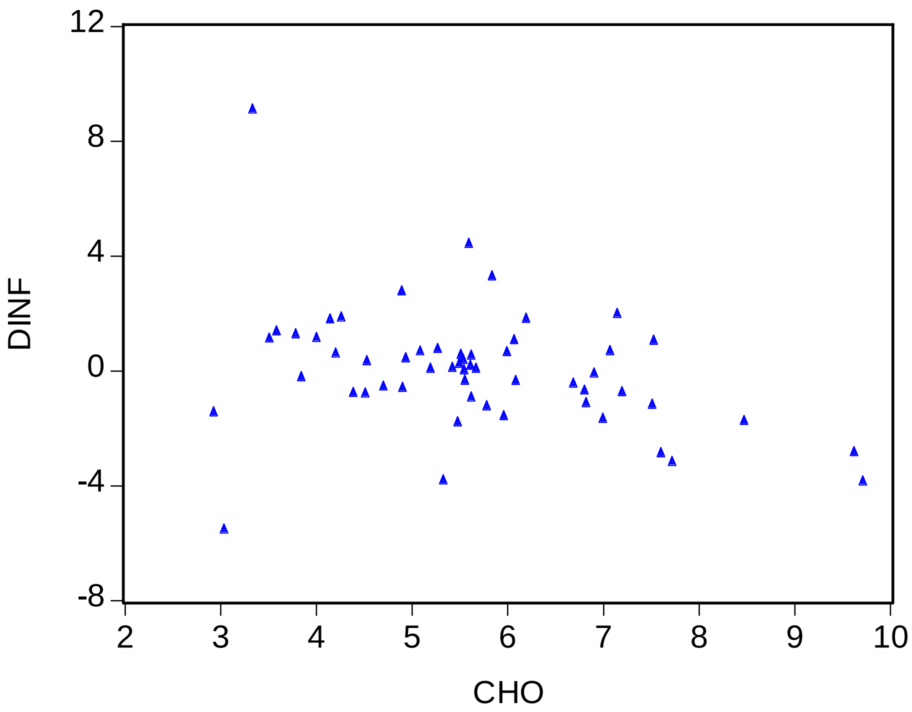

Figure 2. Nuage de points.

3. La matrice des corrélations entre CHO et DINF est donnée ci-après :

	CHO	DINF
CHO	1	-0.354
DINF	-0.354	1

Commenter ces résultats. Ceux-ci sont-ils cohérents avec les commentaires effectués aux questions 1 et 2 ?

4. Le tableau 1 ci-après donne les résultats issus de la régression de DINF sur une constante et sur CHO.

Tableau 1. Résultats de l'estimation

Dependent Variable: DINF
Method: Least Squares
Date: 06/17/07 Time: 17:14
Sample (adjusted): 1950 2005
Included observations: 56 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.911920	1.075428	2.707684	0.0091
CHO	-0.512079	0.184076	-2.781889	0.0074

R-squared	0.125349	Mean dependent var	0.017075
Adjusted R-squared	0.109152	S.D. dependent var	2.152267
S.E. of regression	2.031412	Akaike info criterion	4.290401
Sum squared resid	222.8384	Schwarz criterion	4.362735
Log likelihood	-118.1312	F-statistic	7.738907
Durbin-Watson stat	2.351128	Prob(F-statistic)	0.007428

4.1. Quelle est la variable expliquée et quelle est la variable explicative ?
4.2. Quel est l'impact d'une hausse de 10% de CHO sur DINF ? Commenter.
4.3. CHO est-elle une variable significative dans l'explication de DINF ? Détailler.

5. On s'intéresse désormais à l'étude des résidus du modèle estimé ci-dessus.
5.1. Ecrire l'équation de définition des résidus.
5.2. La figure 3 reproduit les résidus issus de l'estimation du modèle considéré. Commenter.

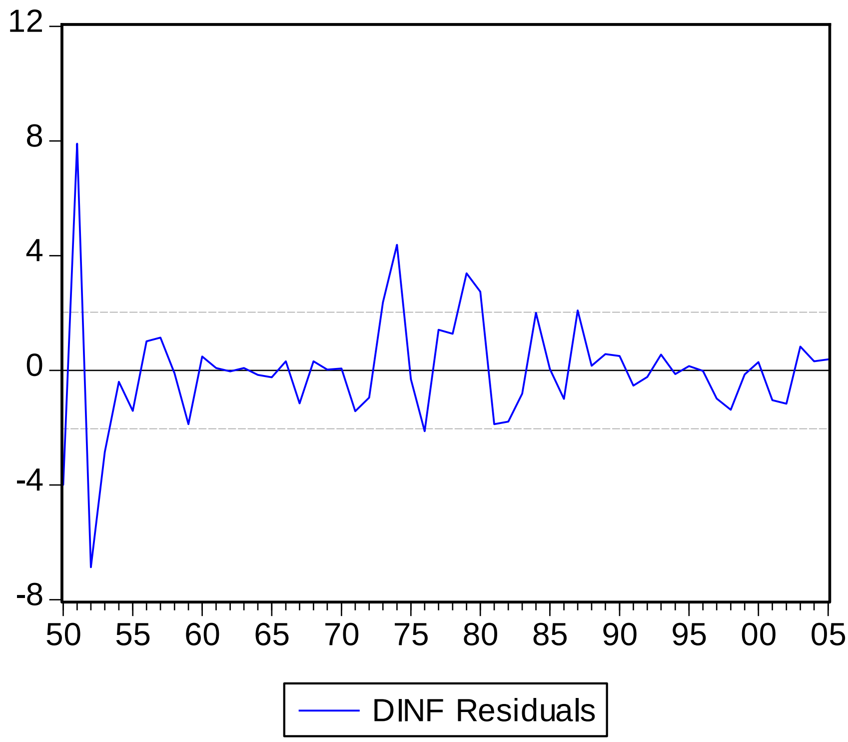

Figure 3. Résidus.

5.3. Quelle statistique de test figurant dans le tableau 1 permet d'appréhender la question de l'autocorrélation des résidus ? Rappelez de façon détaillée le principe de ce test et conclure quant à la nature des résidus. Les valeurs critiques d_1 et d_2 sont respectivement égales à 1,65 et 1,69 au seuil statistique de 5%.

5.4. Le tableau 2 reporte les résultats du test de Breusch-Godfrey. Après avoir rappelé le principe et les caractéristiques du test, commentez les résultats obtenus. On donne la valeur critique de la loi du Khi-deux à 1 degré de liberté : 3,841 au seuil statistique de 5%.

Tableau 2. Test de Breusch-Godfrey

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	2.528091	Prob. F(1,53)	0.117783
Obs*R-squared	2.549576	Prob. Chi-Square(1)	0.110324

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 07/11/07 Time: 09:28
Sample: 1950 2005
Included observations: 56
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.210693	1.068774	-0.197135	0.8445
CHO	0.037008	0.183012	0.202217	0.8405
RESID(-1)	-0.215193	0.135342	-1.589997	0.1178

R-squared	0.045528	Mean dependent var	3.17E-17
Adjusted R-squared	0.009510	S.D. dependent var	2.012860
S.E. of regression	2.003266	Akaike info criterion	4.279518
Sum squared resid	212.6930	Schwarz criterion	4.388019
Log likelihood	-116.8265	F-statistic	1.264045
Durbin-Watson stat	1.996147	Prob(F-statistic)	0.290886

5.5. Le tableau 3 reporte les résultats du test de White. Après avoir rappelé les principales caractéristiques de ce test (hypothèses nulle et alternative, principe général du test, règle de décision), commenter les résultats. Conclure quant à la nature des résidus. On rappelle que la valeur critique de la loi du Khi-deux à 2 degrés de liberté est égale à 5,991 au seuil statistique de 5%.

Tableau 3. Test de White

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	6.106181	Prob. F(2,53)	0.004107
Obs*R-squared	10.48716	Prob. Chi-Square(2)	0.005281

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 07/11/07 Time: 09:28
Sample: 1950 2005
Included observations: 56

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	53.05873	15.29774	3.468404	0.0010
CHO	-15.26311	5.160906	-2.957449	0.0046
CHO^2	1.090008	0.420409	2.592736	0.0123

R-squared	0.187271	Mean dependent var	3.979257
Adjusted R-squared	0.156602	S.D. dependent var	10.67809
S.E. of regression	9.806404	Akaike info criterion	7.456032
Sum squared resid	5096.775	Schwarz criterion	7.564532
Log likelihood	-205.7689	F-statistic	6.106181
Durbin-Watson stat	0.894607	Prob(F-statistic)	0.004107

5.6. Le tableau 4 reporte les estimations utilisant la correction de White. Après avoir rappelé l'objet de cette correction, commentez les résultats figurant dans le tableau 4.

Tableau 4. Correction de White

Dependent Variable: DINF
Method: Least Squares
Date: 07/11/07 Time: 09:32
Sample (adjusted): 1950 2005
Included observations: 56 after adjustments
White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.911920	1.572299	1.852015	0.0695
CHO	-0.512079	0.247808	-2.066430	0.0436

R-squared	0.125349	Mean dependent var	0.017075
Adjusted R-squared	0.109152	S.D. dependent var	2.152267
S.E. of regression	2.031412	Akaike info criterion	4.290401
Sum squared resid	222.8384	Schwarz criterion	4.362735
Log likelihood	-118.1312	F-statistic	7.738907
Durbin-Watson stat	2.351128	Prob(F-statistic)	0.007428

UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE
UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008 — Cours de Valérie MIGNON
Cours d'économétrie – L3 Economie — TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

Annexe 1. Algèbre linéaire

On désigne les matrices par des lettres majuscules et les vecteurs par des lettres minuscules. $\underset{(m,n)}{A}$ est une matrice à m lignes et n colonnes, composée d'éléments a_{ij}, A' est la transposée de A. Pour un vecteur $\underset{(n,1)}{x}$, on notera pareillement x' son transposé. A symétrique $\Leftrightarrow A' = A$

$\underset{(T,1)}{e_T}$ est le vecteur dont tous les éléments sont égaux à 1.

$\underset{(T,T)}{I_T}$ est la matrice identité

$\underset{(T,T)}{J_T}$ est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1. On a $J_T = e_T.e'_T$

Propriétés : (1) $(AB)' = B'A'$
(2) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ (si A régulière)
(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (si A et B régulières)

Rang : Soit $\underset{(m,n)}{A}$. $Rg(A)$ = nombre de colonnes linéairement indépendantes.

Propriétés : (4) $Rg(\underset{(m,n)}{A}) \leq \inf(m,n)$
(5) $Rg(AB) \leq \inf(Rg(A), Rg(B))$
(6) $Rg(A) = Rg(A') = Rg(AA') = Rg(A'A)$
(7) $Rg(A+B) \leq Rg(A) + Rg(B)$
(8) Si B et C sont régulières, $Rg(AB) = Rg(CA) = Rg(A)$

Déterminant : (9) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ $\quad |A'| = |A|$
(10) $|AB| = |A||B| = |BA|$ si A et B sont carrées
(11) $|\alpha A| = \alpha^n |A|$ $\quad \underset{(n,n)}{A}$ et α scalaire
(12) $\underset{(n,n)}{A}$ régulière $\Leftrightarrow Rg(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Trace : $Tr(\underset{(n,n)}{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

(13) $Tr(A) = Tr(A')$
(14) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
(15) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ où λ scalaire
(16) $Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$ $(\neq Tr(BAC))$
Sous réserve que les différents produits matriciels soient définis
(17) Soit E l'opérateur "espérance mathématique", on a $Tr(E(X)) = E(Tr(X))$

Matrices orthogonales :

A orthogonale $\Leftrightarrow A^{-1} = A' \Leftrightarrow AA' = A'A = I$

(18) A orthogonale $\Rightarrow |A| = \pm 1$

(19) A et B orthogonales $\Rightarrow AB$ orthogonale

Soient 2 vecteurs $\underset{(n,1)}{x_1}$ et $\underset{(n,1)}{x_2}$, ils sont orthogonaux si $x_1'x_2 = x_2'x_1 = 0$

(20) Une matrice $\underset{(n,n)}{A}$ est orthogonale si elle est formée de n vecteurs $\underset{(n,1)}{x_i}$ orthogonaux entre eux et de longueur 1 (c'est à dire $x_i'x_i = 1$)

Vecteurs propres, valeurs propres, diagonalisation : soit A une matrice carrée (n, n). $\underset{(n,1)}{x}$ est un vecteur propre de A s'il est non nul et si $Ax = \lambda x$, λ scalaire.

Pour que le système d'équations $(A - \lambda I_n)x = 0$ ait une solution non nulle, il faut que $|A - \lambda I_n| = 0$.

$|A - \lambda I_n| = 0$ est un polynôme de degré n, qui peut admettre n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes ou non. On notera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les vecteurs propres correspondants.

(21) Si $Rg(A) = r$ alors A a r valeurs propres non nulles

Soit A une matrice carrée (n, n).

(22) Les vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux

(23) Si A a n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on peut écrire A sous la forme $A = XDX'$ où D est la matrice diagonale formée des valeurs propres de A et où X est la matrice orthogonale formée des vecteurs propres normés (de longueur 1) associés à ces valeurs propres. On a ainsi $X'AX = D$.

(24) $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

(25) $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

(26) $A^p = XD^pX'$

Théorème : Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Matrices définies positives

Soit $\underset{(n,n)}{A}$ symétrique : A définie positive $\Leftrightarrow$ $x'Ax > 0 \quad \forall \underset{(n,1)}{x} \neq 0$

A définie semi-positive $\Leftrightarrow$ $x'Ax \geq 0 \quad \forall \underset{(n,1)}{x} \neq 0$

(27) A définie (semi) positive $\Leftrightarrow$ Toutes les valeurs propres de A sont > 0 (≥ 0)

(28) A définie positive $\Leftrightarrow A^{-1}$ définie positive

(29) A définie positive $\Rightarrow B'AB$ définie positive, pour $\underset{(n,p)}{B}$ de rang p

(30) A définie semi-positive $\Rightarrow B'AB$ définie semi-positive, pour $\underset{(n,p)}{B}$ de rang quelconque

(31) Soit $\underset{(n,p)}{B}$ de rang p, alors $\underset{(p,p)}{B'B}$ est définie positive

(32) Soit $\underset{(n,p)}{B}$ de rang quelconque, alors $\underset{(p,p)}{B'B}$ est définie semi-positive

Ainsi, pour une matrice $\underset{(n,p)}{X}$ de rang p, $X'X$ est définie positive mais XX' est définie semi-positive

(33) A définie (semi) positive $\Rightarrow$ tout élément de la diagonale principale est > 0 (≥ 0)

(34) A définie (semi) positive $\Leftrightarrow$ il existe B définie (semi) positive telle que $A = BB' = B^2$ (soit $B = A^{\frac{1}{2}}$)

(35) Si $A - B$ est définie (semi) positive et B est définie positive alors : (i) A est définie positive, (ii) $|A| \geq |B|$, (iii) $B^{-1} - A^{-1}$ est définie (semi) positive.

Matrices idempotentes

A idempotente $\Leftrightarrow A^2 = A$

(36) A idempotente $\Rightarrow$ les valeurs propres de A sont égales à 0 ou à 1

(37) A idempotente $\Rightarrow Rg(A) = Tr(A)$

(38) A idempotente et régulière $\Leftrightarrow A = I$

(39) A idempotente $\Rightarrow C'AC$ idempotente où C orthogonale.

(40) A idempotente et symétrique $\Rightarrow A$ définie semi-positive

(41) A idempotente et symétrique $\Rightarrow \begin{cases} I - A \text{ idempotente et symétrique} \\ A(I-A) = (I-A)A = 0 \end{cases}$

Théorème de Cochran:

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des matrices symétriques de même format, 2 des conditions (i), (ii) et (iii) impliquent les autres conditions (i)(ii)(iii)(iv) :

(i) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont idempotentes

(ii) $A_1 + A_2 + \cdots + A_m$ est idempotente

(iii) $A_i A_j = 0 \; \forall i \neq j$

(iv) $Rg(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = Rg(A_1) + Rg(A_2) + \cdots + Rg(A_m)$

Les matrices idempotentes représentent des applications linéaires particulièrement importantes en économétrie: les projections. Les matrices idempotentes de format (n, n) représentent des projections dans $\mathbb{R}^n$. Les matrices idempotentes symétriques de format (n, n) représentent des projections orthogonales dans $\mathbb{R}^n$

UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE
UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008
Cours d'économétrie – L3 Economie

Cours de Valérie MIGNON
TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

Annexe 2. Rappels de statistique

1 Variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire continue définie sur $\mathbb{R}$. On note $F(x)$ sa fonction de répartition et $f(x)$ sa densité de probabilité. On a : $F(x) = P(X < x)$ et $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$

F est une primitive de f : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Soient X et Y deux variables aléatoires continues définies sur $\mathbb{R}$. La densité de probabilité du couple, $f(x, y)$ est telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$

Les lois marginales de X et Y sont définies par les densités de probabilité :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

Définition : <u>X et Y sont indépendantes si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(x)f(y)$</u>

<u>Propriété</u> : Si X et Y sont indépendantes, les fonctions $g(X)$ et $h(Y)$ sont aussi indépendantes

Espérance

<u>Définition</u> : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

On a aussi : $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

<u>Propriétés</u>	(1)	$E(aX + b) = aE(X) + b$	X v.a. et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
	(2)	$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	
	(3)	E(XY)=E(X)E(Y)	<u>si X et Y sont indépendantes</u>

<u>**Attention**</u> : De façon générale, si $h(X, Y)$ est une fonction non linéaire de X et Y, on a $E(h(X, Y)) \neq h(E(X), E(Y))$. En particulier : $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) \neq \dfrac{E(X)}{E(Y)}$

Variance

Définition : $V(X) = E[(X - E(X))^2]$ On notera parfois $V(X) = \sigma_X^2$

Propriétés

(4) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

(5) V(X+b)=V(X) X v.a. $b \in \mathbb{R}$

(6) $V(aX + b) = a^2 V(X)$ X v.a. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

(7) Si X et Y sont des v.a. indépendantes

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$

$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

Covariance

Définition : $Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$
On note $Cov(X,Y) = \sigma_{XY}$

(8) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$

(9) X et Y indépendantes $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

Attention, la réciproque de la propriété (9) n'est pas vraie : une covariance nulle n'implique pas l'indépendance (sauf dans le cas des lois normales).

On notera ρ_{XY} le coefficient de corrélation entre X et Y défini par : $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$

Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X l'application de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$

Propriétés :

(10) La relation entre $f(x)$ et $\varphi_X(t)$ est bijective. Autrement dit, $\varphi_X(t)$ détermine sans ambiguïté la loi de probabilité de X

(11) Si X et Y sont indépendantes : $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_Y(t)\varphi_Y(t)$

Lois usuelles

La loi Normale

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Propriété : Toute combinaison linéaire de variables aléatoires qui suivent des lois normales (que ces variables aléatoires soient indépendantes ou non) est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale.

Exemple: si $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, on a :

$$a_1X_1 + a_2X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + 2a_1a_2\sigma_{X_1X_2})$$

Propriétés: Si X_1 et X_2 suivent des lois normales, X_1 et X_2 indépendantes $\Leftrightarrow$ $Cov(X_1, X_2) = 0$

La loi du χ^2

$Z \rightsquigarrow \chi_n^2$ si $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ où $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes

Si $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et X_i indépendantes ($i = 1, 2, \ldots, n$) alors $Z = \sum_{1}^{n} \frac{X_i^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_n^2$.

On écrit aussi $V = \sum_{1}^{n} X_i^2 \rightsquigarrow \sigma^2\chi_n^2$

Propriété: si $Z_1 \rightsquigarrow \sigma^2\chi_p^2$ et $Z_2 \rightsquigarrow \sigma^2\chi_q^2$ et si Z_1 et Z_2 indépendantes alors $Z_1 + Z_2 \rightsquigarrow \sigma^2\chi_{p+q}^2$

Si $Z = \sum_{1}^{n} X_i^2$ où $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_i, 1)$ et X_i indépendantes ($i = 1, 2, \ldots, n$) alors Z suit un khi-deux décentré : $Z \rightsquigarrow \chi_{n,\mu}^2$ où μ est le paramètre de décentrage défini par : $\mu = \sum_{1}^{n} \mu_i^2$

La loi de Student

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \rightsquigarrow \chi_n^2$ et si X et Y sont indépendantes alors $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \rightsquigarrow T_n$

NB : pareillement, $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $Y \rightsquigarrow \sigma^2\chi_n^2$ et si X et Y sont indépendantes alors $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \rightsquigarrow T_n$

La loi de Fisher

Si $Z_1 \rightsquigarrow \chi_p^2$ et $Z_2 \rightsquigarrow \chi_q^2$ et si Z_1 et Z_2 sont indépendantes :

$$Y = \frac{Z_1/p}{Z_2/q} \rightsquigarrow F_{p,q}$$

NB : pareillement, si $Z_1 \rightsquigarrow \sigma^2\chi_p^2$ et $Z_2 \rightsquigarrow \sigma^2\chi_q^2$ et si Z_1 et Z_2 sont indépendantes : $Y = \frac{Z_1/p}{Z_2/q} \rightsquigarrow F_{p,q}$

La loi Log-normale

X suit une loi log-normale si $\log X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

2 Vecteurs aléatoires

Par définition $\underset{(T,1)}{x}$ est un vecteur aléatoire si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_T)'$ où les T composantes de x sont des variables aléatoires.

NOTE : on distinguait jusqu'à maintenant une v.a. X de sa réalisation x. Pour des raisons d'écriture matricielle, on notera maintenant x_t une v.a. composante d'un vecteur aléatoire $\underset{(T,1)}{x}$.

$E(x)$ est définie par $E(x) = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_T) \end{pmatrix}$

C'est donc un opérateur linéaire, comme l'espérance linéaire d'une variable aléatoire.

La matrice des variances-covariances de x est définie par :

$$V(x) = \underset{(T,T)}{\Sigma} = E[(x - E(x))(x - E(x))']$$

(12) Σ est une matrice symétrique dont les termes de la diagonale principale sont les variances des composantes de x et dont les autres termes sont les covariances des ces composantes prises deux à deux.

(13) Σ est définie semi-positive. S'il n'existe aucune combinaison linéaire certaine entre les T composante de x, Σ est définie positive.

La loi normale multidimensionelle

Définition : $\underset{(T,1)}{x}$, vecteur aléatoire, est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées suit une loi normale sur $\mathbb{R}$.

Conséquence : les composantes x_t d'un vecteur gaussien suivent des lois normales sur $\mathbb{R}$.

Si $\underset{(T,1)}{x}$ est gaussien, sa densité de probabilité, définie sur $\mathbb{R}^T$, s'écrit :

$$(14) \quad f(x) = (2\Pi)^{-\frac{T}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}e^{[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)]}$$

où $\mu = E(x)$ et $\Sigma = V(x)$. On note $x \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

NB: On suppose Σ inversible : les composantes de x sont supposées linéairement indépendantes.

Propriété — Deux vecteurs gaussiens $\underset{(T,1)}{x}$ et $\underset{(T,1)}{y}$ sont indépendants $\Leftrightarrow$ ils sont de covariance nulle (naturellement, la covariance entre x et y est définie par la matrice $\Sigma_{xy} = E[(x - E(x))(y - E(y))']$).

Théorème (15) Soient y un vecteur gaussien réduit de $\mathbb{R}^T$ ($y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, I_T)$) et $\underset{(T,k)}{X}$ une matrice certaine de rang k. Soit $P_X = X(X'X)^{-1}X'$ la matrice de projection orthogonale sur la variété linéaire engendrée par X. $P_X y$ et $(I_T - P_X)y$ sont gaussiens et indépendants.

Formes quadratiques de vecteurs gaussiens

Théorème (16) Soient y un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^T$ tel que $y \leadsto \mathcal{N}(\mu, I_T)$ et $\underset{(T,k)}{X}$ une matrice certaine de rang k. $y'P_X y$ et $y'(I_T - P_X)y$ sont indépendants et ont pour loi :

$$y'P_X y \leadsto \chi^2_{k,\mu' P_X \mu} \qquad y'(I_T - P_X)y \leadsto \chi^2_{T-k,\mu'(I_T-P_x)\mu}$$

$\overline{y}$ et s^2 sont des variables aléatoires indépendantes, que $\overline{y} \leadsto \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{T})$ et $\frac{T-1}{\sigma^2}s^2 \leadsto \chi^2_{T-1}$

Théorème (17) Soit $\underset{(T,1)}{y} \leadsto \mathcal{N}(0, \Sigma)$ où Σ régulière. On a : $y'\Sigma^{-1}y \leadsto \chi^2_T$

Théorème (18) Soit $\underset{(T,1)}{y} \leadsto \mathcal{N}(0, I_T)$, $\underset{(T,T)}{A}$ symétrique de rang k, alors
$y'Ay \leadsto \chi^2_k \Leftrightarrow A$ idempotente

Théorème (19) Soit $\underset{(T,1)}{y} \leadsto \mathcal{N}(0, \Sigma)$ où Σ régulière, alors
$y' \underset{(T,T)}{A} y \leadsto \chi^2_k \Leftrightarrow A\Sigma A = A$

UNIVERSITE PARIS X – NANTERRE
UFR SEGMI

Année universitaire 2007 – 2008 — Cours de Valérie MIGNON
Cours d'économétrie – L3 Economie — TD de Benoît CHEZE et Anne-Laure SAMSON

Annexe 3. Tables statistiques

Quantiles d'une loi de Student à n degrés de liberté
(Valeurs de x telles que $Prob(T_n \leq x) = F$)

$n \backslash F$	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,675	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576	3,291

Loi de Fisher

(Valeurs de x telles que $Prob(F_{p,q} \leq x) = 95\%$)

$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75

Loi de Fisher

(Valeurs de x telles que $Prob(F_{p,q} \leq x) = 99\%$)

$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
1	4052,18	4999,50	5403,35	5624,58	5763,65	5858,99	5928,36	5981,07	6022,47	6055,85	6106,32
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,56
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,42
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,37
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34
∞	6,64	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,19

Table C5. Test de Durbin et Watson
Test unilatéral de $\rho = 0$ contre $\rho > 0$
(Valeurs critiques d_L^* et d_U^* pour un risque de première espèce $\alpha = 5\,\%$)

n	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

(n : nombre d'observations ; k' : nombre de variables explicatives autres que la constante)