

I - Programmation linéaire

Jean-Philippe Préaux

EOAA - 2009/10

Préliminaires

Formulation

Exemple de problème bidimensionnel

Généralisation

Méthode du simplexe

Problème sous forme normale

Méthode du simplexe

Résolution dans le cas général

Programmation linéaire en nombres entiers

Exercices

Exercice 1. Gestion optimale des ressources

Exercice 2. Production optimale

Exercice 3.a. Problème du consommateur

Exercice 3.b. Problème du concurrent

Formulation

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire (ou affine).

Formulation

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire (ou affine).

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, p applications linéaires,

Formulation

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire (ou affine).
Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, p applications linéaires,
 $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Formulation

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire (ou affine).

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, p applications linéaires,

$(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Un problème de programmation linéaire s'écrit :

$$\begin{array}{l} \min \\ \max \end{array} f(\mathbf{x})$$

soumis aux contraintes inégalitaires (on se dispensera ici de contraintes égalitaires) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) \leq b_2 \\ \vdots \\ \varphi_p(x_1, \dots, x_n) \leq b_p \end{array} \right.$$

En utilisant le produit scalaire

$f, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.

En utilisant le produit scalaire

$f, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.

$\implies \exists \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle ,$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

En utilisant le produit scalaire

$f, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.

$\implies \exists \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle ,$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

$\forall i = 1, \dots, p, \exists \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n,$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle .$$

Notation matricielle

Matrice et vecteur des contraintes :

Notation matricielle

Matrice et **vecteur des contraintes** :

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n}$$

Notation matricielle

Matrice et **vecteur des contraintes** :

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p .$$

Notation matricielle

Matrice et vecteur des contraintes :

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p .$$

Le problème d'optimisation s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \min \\ & \max \\ & \mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

Notation matricielle

Matrice et vecteur des contraintes :

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots p \\ j=1 \dots n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p .$$

Le problème d'optimisation s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \min \\ & \max \\ & \mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

Si de plus $x_1, \dots, x_n \geq 0$, on note $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Notation matricielle

Matrice et vecteur des contraintes :

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots p \\ j=1 \dots n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p .$$

Le problème d'optimisation s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \min \\ & \max \\ & \mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

Si de plus $x_1, \dots, x_n \geq 0$, on note $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Attention : $\geq$ ne représente qu'une inégalité terme à terme.

Forme canonique

Un problème de programmation linéaire est sous **forme canonique** s'il s'écrit :

$$\max_x \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Forme canonique

Un problème de programmation linéaire est sous **forme canonique** s'il s'écrit :

$$\max_x \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Tout problème linéaire peut s'écrire sous forme canonique :

Forme canonique

Un problème de programmation linéaire est sous **forme canonique** s'il s'écrit :

$$\max_x \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Tout problème linéaire peut s'écrire sous forme canonique :

– **Changer min en max :**

$$\min \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \iff \max \langle -\mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle .$$

Forme canonique

Un problème de programmation linéaire est sous **forme canonique** s'il s'écrit :

$$\max_x \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Tout problème linéaire peut s'écrire sous forme canonique :

– **Changer min en max :**

$$\min \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \iff \max \langle -\mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle .$$

– **Contraintes de signe :**

si $x_i \not\geq 0$, poser $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+, x_i^- \geq 0$.

Exemple de problème de programmation linéaire.

Un société fabrique deux types de produits A et B (par exemple deux types de système audio), dont la vente lui rapporte un bénéfice brut respectif de 150 u.m. et de 450 u.m..

Exemple de problème de programmation linéaire.

Un société fabrique deux types de produits A et B (par exemple deux types de système audio), dont la vente lui rapporte un bénéfice brut respectif de 150 u.m. et de 450 u.m.. Sa production est limitée respectivement à 120 et 70 unités.

Exemple de problème de programmation linéaire.

Un société fabrique deux types de produits A et B (par exemple deux types de système audio), dont la vente lui rapporte un bénéfice brut respectif de 150 u.m. et de 450 u.m.. Sa production est limitée respectivement à 120 et 70 unités. Une même pièce P (par exemple un lecteur CD) rentre dans la fabrication d'une unité de A , ainsi que dans la fabrication d'une unité de B .

Exemple de problème de programmation linéaire.

Un société fabrique deux types de produits A et B (par exemple deux types de système audio), dont la vente lui rapporte un bénéfice brut respectif de 150 u.m. et de 450 u.m.. Sa production est limitée respectivement à 120 et 70 unités. Une même pièce P (par exemple un lecteur CD) rentre dans la fabrication d'une unité de A , ainsi que dans la fabrication d'une unité de B . Une même pièce Q (par exemple un haut-parleur) rentre dans la fabrication d'une unité de A , tandis que deux pièces Q sont nécessaires à la fabrication d'une pièce B .

Exemple de problème de programmation linéaire.

Un société fabrique deux types de produits A et B (par exemple deux types de système audio), dont la vente lui rapporte un bénéfice brut respectif de 150 u.m. et de 450 u.m.. Sa production est limitée respectivement à 120 et 70 unités. Une même pièce P (par exemple un lecteur CD) rentre dans la fabrication d'une unité de A , ainsi que dans la fabrication d'une unité de B . Une même pièce Q (par exemple un haut-parleur) rentre dans la fabrication d'une unité de A , tandis que deux pièces Q sont nécessaires à la fabrication d'une pièce B . Elle dispose d'un stock de 140 pièces P et de 180 pièces Q .

Exemple de problème de programmation linéaire.

Un société fabrique deux types de produits A et B (par exemple deux types de système audio), dont la vente lui rapporte un bénéfice brut respectif de 150 u.m. et de 450 u.m.. Sa production est limitée respectivement à 120 et 70 unités. Une même pièce P (par exemple un lecteur CD) rentre dans la fabrication d'une unité de A , ainsi que dans la fabrication d'une unité de B . Une même pièce Q (par exemple un haut-parleur) rentre dans la fabrication d'une unité de A , tandis que deux pièces Q sont nécessaires à la fabrication d'une pièce B . Elle dispose d'un stock de 140 pièces P et de 180 pièces Q .

Comment gérer au mieux sa production en produits A , B pour en retirer le bénéfice maximal ?

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,
 y la quantité de produits B fabriqués,

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,

y la quantité de produits B fabriqués,

$f(x, y) = 150x + 450y$ la fonction économique qui donne le bénéfice brut pour une production (x, y)

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,

y la quantité de produits B fabriqués,

$f(x, y) = 150x + 450y$ la fonction économique qui donne le bénéfice brut pour une production (x, y)

Le problème d'optimisation se formalise alors :

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,

y la quantité de produits B fabriqués,

$f(x, y) = 150x + 450y$ la fonction économique qui donne le bénéfice brut pour une production (x, y)

Le problème d'optimisation se formalise alors :

Problème de max : $\max_{(x,y)} f(x, y) = 150x + 450y$

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,

y la quantité de produits B fabriqués,

$f(x, y) = 150x + 450y$ la fonction économique qui donne le bénéfice brut pour une production (x, y)

Le problème d'optimisation se formalise alors :

Problème de max : $\max_{(x,y)} f(x, y) = 150x + 450y$

Limites de production : $x \leq 120$
 $y \leq 70$

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,

y la quantité de produits B fabriqués,

$f(x, y) = 150x + 450y$ la fonction économique qui donne le bénéfice brut pour une production (x, y)

Le problème d'optimisation se formalise alors :

Problème de max : $\max_{(x,y)} f(x, y) = 150x + 450y$

Limites de production : $x \leq 120$
 $y \leq 70$

Stocks disponibles : $x + y \leq 140$
 $x + 2y \leq 180$

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,

y la quantité de produits B fabriqués,

$f(x, y) = 150x + 450y$ la fonction économique qui donne le bénéfice brut pour une production (x, y)

Le problème d'optimisation se formalise alors :

Problème de max : $\max_{(x,y)} f(x, y) = 150x + 450y$

Limites de production : $x \leq 120$
 $y \leq 70$

Stocks disponibles : $x + y \leq 140$
 $x + 2y \leq 180$

Contraintes de signe : $x, y \geq 0$ (S)

Formulation

Notons :

x la quantité de produits A fabriqués,

y la quantité de produits B fabriqués,

$f(x, y) = 150x + 450y$ la fonction économique qui donne le bénéfice brut pour une production (x, y)

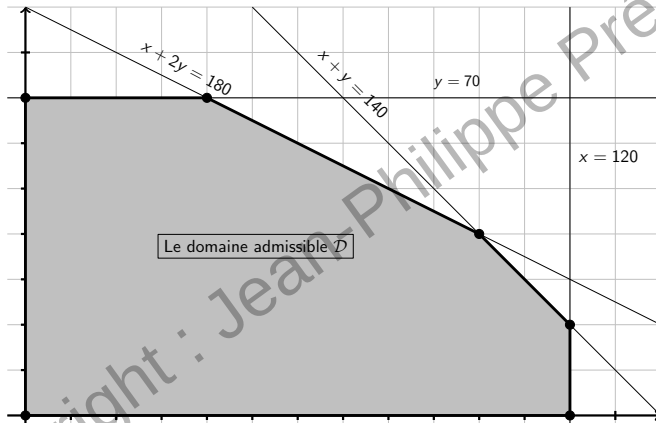
Le problème d'optimisation se formalise alors :

Problème de max : $\max_{(x,y)} f(x, y) = 150x + 450y$

Limites de production : $x \leq 120$
 $y \leq 70$

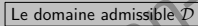
Stocks disponibles : $x + y \leq 140$
 $x + 2y \leq 180$

Contraintes de signe : $x, y \geq 0$ (S)

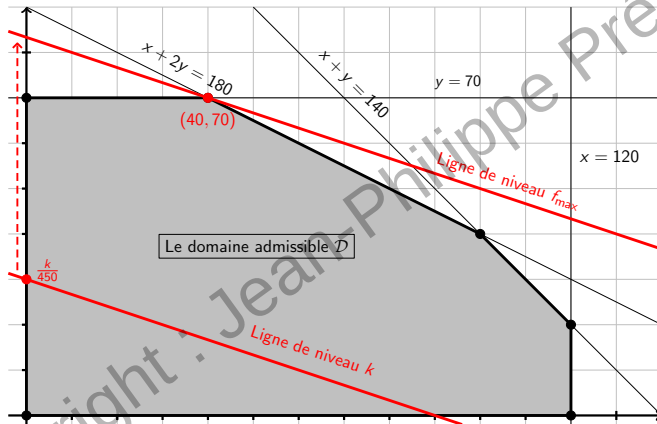


Le domaine admissible est le **polygone convexe** de $\mathbb{R}^2$:

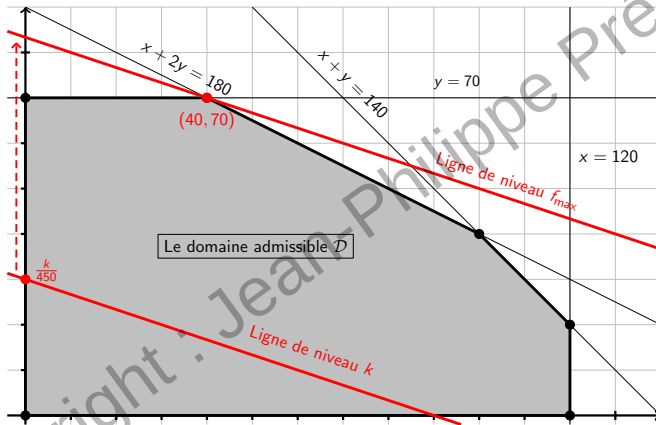
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 120, 0 \leq y \leq 70, x + y \leq 140, x + 2y \leq 180\}$$



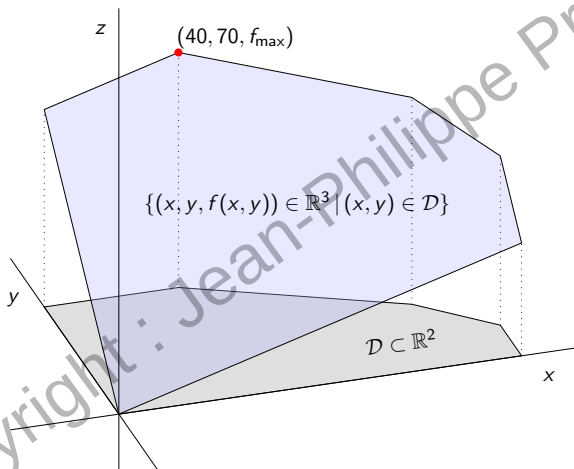
◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡



Le maximum est atteint sur l'un des sommets de l'hexagone :



Le maximum est atteint sur l'un des sommets de l'hexagone :
il faut produire 40 pièces A et 70 pièces B pour une bénéfice de 37500 u.m..



La nappe représentative de f au dessus de $\mathcal{D}$.

En dimension n

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.

En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.
- Le domaine admissible est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces.

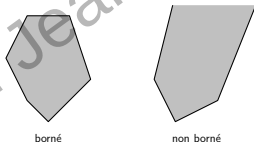
En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.
- Le domaine admissible est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. C'est un polytope convexe, ayant un nombre fini de sommets.

En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.
- Le domaine admissible est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. C'est un polytope convexe, ayant un nombre fini de sommets.

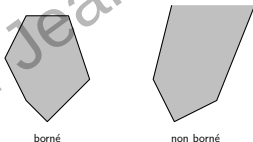
Il peut être borné, ou non borné :



En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.
- Le domaine admissible est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. C'est un polytope convexe, ayant un nombre fini de sommets.

Il peut être borné, ou non borné :

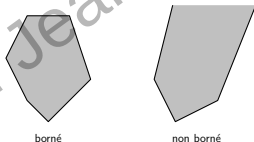


lorsqu'il est borné, c'est un compact

En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.
- Le domaine admissible est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. C'est un polytope convexe, ayant un nombre fini de sommets.

Il peut être borné, ou non borné :

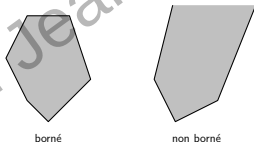


lorsqu'il est borné, c'est un compact $\implies f$ y admet un maximum.

En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.
- Le domaine admissible est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. C'est un polytope convexe, ayant un nombre fini de sommets.

Il peut être borné, ou non borné :



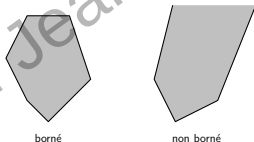
lorsqu'il est borné, c'est un compact $\implies f$ y admet un maximum.

- Les hypersurfaces de niveau forment un faisceau d'hyperplans parallèles

En dimension n

- Chaque contrainte inégalitaire est l'équation d'un demi-espace. Sa frontière est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.
- Le domaine admissible est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. C'est un polytope convexe, ayant un nombre fini de sommets.

Il peut être borné, ou non borné :



lorsqu'il est borné, c'est un compact $\implies f$ y admet un maximum.

- Les hypersurfaces de niveau forment un faisceau d'hyperplans parallèles $\implies$ lorsqu'un max existe, il est atteint sur l'un des sommets.

Théorème fondamental de la Programmation linéaire

Théorème fondamental de la Programmation linéaire

On a obtenu :

Théorème (Programmation linéaire)

En programmation linéaire, le domaine admissible, s'il est ni vide ni tout $\mathbb{R}^n$, est un polytope convexe ayant un nombre fini de sommets, qui peut être borné ou non borné.

Théorème fondamental de la Programmation linéaire

On a obtenu :

Théorème (Programmation linéaire)

En programmation linéaire, le domaine admissible, s'il est ni vide ni tout $\mathbb{R}^n$, est un polytope convexe ayant un nombre fini de sommets, qui peut être borné ou non borné. Si un extremum existe alors il est atteint sur l'un des sommets du polytope. Un point dans l'intérieur du domaine n'est jamais extremal si $f \neq 0$.

Théorème fondamental de la Programmation linéaire

On a obtenu :

Théorème (Programmation linéaire)

En programmation linéaire, le domaine admissible, s'il est ni vide ni tout $\mathbb{R}^n$, est un polytope convexe ayant un nombre fini de sommets, qui peut être borné ou non borné. Si un extremum existe alors il est atteint sur l'un des sommets du polytope. Un point dans l'intérieur du domaine n'est jamais extremal si $f \neq 0$. Lorsque le polytope est borné, f y prend un minimum ainsi qu'un maximum.

Théorème fondamental de la Programmation linéaire

On a obtenu :

Théorème (Programmation linéaire)

En programmation linéaire, le domaine admissible, s'il est ni vide ni tout $\mathbb{R}^n$, est un polytope convexe ayant un nombre fini de sommets, qui peut être borné ou non borné. Si un extremum existe alors il est atteint sur l'un des sommets du polytope. Un point dans l'intérieur du domaine n'est jamais extremal si $f \neq 0$. Lorsque le polytope est borné, f y prend un minimum ainsi qu'un maximum.

⇒ Fournit en particulier une méthode de résolution géométrique.

Théorème fondamental de la Programmation linéaire

On a obtenu :

Théorème (Programmation linéaire)

En programmation linéaire, le domaine admissible, s'il est ni vide ni tout $\mathbb{R}^n$, est un polytope convexe ayant un nombre fini de sommets, qui peut être borné ou non borné. Si un extremum existe alors il est atteint sur l'un des sommets du polytope. Un point dans l'intérieur du domaine n'est jamais extremal si $f \neq 0$. Lorsque le polytope est borné, f y prend un minimum ainsi qu'un maximum.

⇒ Fournit en particulier une méthode de résolution géométrique.
Méthode à proscrire ! on emploiera plutôt la méthode du simplexe.

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947.

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Elle met à profit ces constations géométriques. On part d'un sommet initial (en général l'origine).

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Elle met à profit ces constatations géométriques. On part d'un sommet initial (en général l'origine). Une itération consiste en un saut sur un sommet voisin qui accroît la valeur de la fonction.

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Elle met à profit ces constations géométriques. On part d'un sommet initial (en général l'origine). Une itération consiste en un saut sur un sommet voisin qui accroît la valeur de la fonction.

Lorsque ce n'est plus possible on se trouve sur un maximum local.

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Elle met à profit ces constations géométriques. On part d'un sommet initial (en général l'origine). Une itération consiste en un saut sur un sommet voisin qui accroît la valeur de la fonction. Lorsque ce n'est plus possible on se trouve sur un maximum local.

La linéarité -plus encore la convexité- assure que c'est un maximum global.

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Elle met à profit ces constations géométriques. On part d'un sommet initial (en général l'origine). Une itération consiste en un saut sur un sommet voisin qui accroît la valeur de la fonction. Lorsque ce n'est plus possible on se trouve sur un maximum local. La linéarité -plus encore la convexité- assure que c'est un maximum global. **Lorsqu'il n'y a pas de maximum la méthode le signale.**

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Elle met à profit ces constations géométriques. On part d'un sommet initial (en général l'origine). Une itération consiste en un saut sur un sommet voisin qui accroît la valeur de la fonction. Lorsque ce n'est plus possible on se trouve sur un maximum local. La linéarité -plus encore la convexité- assure que c'est un maximum global. Lorsqu'il n'y a pas de maximum la méthode le signale. En théorie un phénomène retors de cyclage peut apparaître ;

Méthode du simplexe

Méthode inventée par le mathématicien américain Georges Dantzig en 1947. Il travaille alors comme conseiller pour l'US air force, sur la mécanisation de la planification militaire.

C'est une méthode très efficace. Une des plus utilisées de toute l'histoire des mathématiques appliquées.

Elle met à profit ces constations géométriques. On part d'un sommet initial (en général l'origine). Une itération consiste en un saut sur un sommet voisin qui accroît la valeur de la fonction. Lorsque ce n'est plus possible on se trouve sur un maximum local. La linéarité -plus encore la convexité- assure que c'est un maximum global. Lorsqu'il n'y a pas de maximum la méthode le signale. En théorie un phénomène retors de *cyclage* peut apparaître ; mais il n'apparaît presque jamais en pratique.

Forme normale

Un problème de programmation linéaire est *sous forme normale*, lorsqu'il s'écrit :

Forme normale

Un problème de programmation linéaire est *sous forme normale*, lorsqu'il s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} \max_x \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{S}) \end{array} \right\} \text{forme canonique}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{conditions de positivité}$$

Forme normale

Un problème de programmation linéaire est *sous forme normale*, lorsqu'il s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{S}) \end{array} \right\} \text{forme canonique}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{conditions de positivité}$$

c'est à dire lorsqu'en plus d'être sous forme canonique il vérifie les deux conditions de positivité.

Forme normale

Un problème de programmation linéaire est *sous forme normale*, lorsqu'il s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (S) \end{array} \right\} \text{forme canonique}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{conditions de positivité}$$

c'est à dire lorsqu'en plus d'être sous forme canonique il vérifie les deux conditions de positivité.

On n'appliquera la méthode du simplexe qu'à des problèmes sous forme normale.

Forme normale

Un problème de programmation linéaire est *sous forme normale*, lorsqu'il s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} \max_x \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{S}) \end{array} \right\} \text{forme canonique}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{conditions de positivité}$$

c'est à dire lorsqu'en plus d'être sous forme canonique il vérifie les deux conditions de positivité.

On n'appliquera la méthode du simplexe qu'à des problèmes sous forme normale.

On verra comment écrire tout problème de programmation linéaire sous forme normale.

Méthode du simplexe I : préparation

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Méthode du simplexe I : préparation

- **a.** On change chaque contrainte inégalitaire $\varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ en contrainte égalitaire en introduisant une **variable d'écart** s_i :

Méthode du simplexe I : préparation

- **a.** On change chaque contrainte inégalitaire $\varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ en contrainte égalitaire en introduisant une **variable d'écart** s_i :

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq b_i \iff \begin{cases} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

Méthode du simplexe I : préparation

- **a.** On change chaque contrainte inégalitaire $\varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ en contrainte égalitaire en introduisant une **variable d'écart** s_i :

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq b_i \iff \begin{cases} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

- **b.** On constitue un tableau sur lequel on travaillera :

Méthode du simplexe I : préparation

- **a.** On change chaque contrainte inégalitaire $\varphi_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ en contrainte égalitaire en introduisant une **variable d'écart** s_i :

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq b_i \iff \begin{cases} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

- **b.** On constitue un tableau sur lequel on travaillera :

x_1	$\cdots$	x_n	s_1	$\cdots$	s_p	b	
a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	1		0	b_1	} partie centrale
$\vdots$	A			$\ddots$		$\vdots$	
a_{p1}	$\cdots$	a_{pn}	0		1	b_p	
c_1	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	0	$f - 0$	} ligne résultat

Méthode du simplexe II : Implémentation

Boucle principale de l'algorithme.

Méthode du simplexe II : Implémentation

Boucle principale de l'algorithme.

- Tant que la ligne résultat contient un terme > 0 à gauche.
- Fin tant que.

Méthode du simplexe II : Implémentation

Boucle principale de l'algorithme.

- Tant que la ligne résultat contient un terme > 0 à gauche.
 - Le plus grand de ces éléments détermine *la colonne pivot j* .
- Fin tant que.

Méthode du simplexe II : Implémentation

Boucle principale de l'algorithme.

- Tant que la ligne résultat contient un terme > 0 à gauche.
 - Le plus grand de ces éléments détermine *la colonne pivot* j .
 - Choisir un *pivot* dans la colonne pivot :
C'est l'élément α_{ij} de la partie centrale choisi tel que b_i/α_{ij} soit ≥ 0 et minimal. Il détermine la ligne pivot (L).
- Fin tant que.

Méthode du simplexe II : Implémentation

Boucle principale de l'algorithme.

- Tant que la ligne résultat contient un terme > 0 à gauche.
 - Le plus grand de ces éléments détermine *la colonne pivot* j .
 - Choisir un *pivot* dans la colonne pivot :
C'est l'élément α_{ij} de la partie centrale choisi tel que b_i/α_{ij} soit ≥ 0 et minimal. Il détermine la ligne pivot (L).
 - Si on ne peut pas trouver de pivot : pas de solution.
- Fin tant que.

Méthode du simplexe II : Implémentation

Boucle principale de l'algorithme.

- Tant que la ligne résultat contient un terme > 0 à gauche.
 - Le plus grand de ces éléments détermine la *colonne pivot* j .
 - Choisir un *pivot* dans la colonne pivot :
C'est l'élément α_{ij} de la partie centrale choisi tel que b_i/α_{ij} soit ≥ 0 et minimal. Il détermine la ligne pivot (L).
 - Si on ne peut pas trouver de pivot : pas de solution.
 - Sinon ajouter $\alpha \cdot (L)$ à chaque autre ligne jusqu'à annuler tous les termes de la colonne pivot autres que le pivot.
- Fin tant que.

Méthode du simplexe II : implémentation

	a_{1j}		b_j
	$\vdots$		$\vdots$
	a_{ij}		b_i
	$\vdots$		$\vdots$
	a_{pj}		b_p
	$c_{\max} > 0$		$f - R$

Colonne
pivot

Le plus grand élément de la ligne résultat (à gauche), détermine la colonne pivot

Méthode du simplexe II : implémentation

(L) :

	a_{1j}		b_j
	$\vdots$		$\vdots$
	a_{ij}		b_i
	$\vdots$		$\vdots$
	a_{pj}		b_p
	$c_{\max} > 0$		$f - R$

b_i/a_{ij} minimal

Colonne
pivot

Le pivot est l'élément a_{ij} de la colonne pivot (en haut) tel que b_i/a_{ij} soit ≥ 0 et minimal. Il détermine la ligne pivot (L).

Méthode du simplexe II : implémentation

(L) :

	a_{1j}		b_j	$-a_{1j}/a_{ij} \times (L)$
	$\vdots$		$\vdots$	
	a_{ij}		b_i	
	$\vdots$		$\vdots$	
	a_{pj}		b_p	$-a_{pj}/a_{ij} \times (L)$
	$c_{\max} > 0$		$f - R$	$-c/a_{ij} \times (L)$

Colonne
pivot

On utilise la ligne pivot pour annuler tous les termes de la colonne pivot, autres que le pivot.

Méthode du simplexe II : implémentation

	0		$b_j - a_{1j}b_i/a_{ij}$
	$\vdots$		$\vdots$
	a_{ij}		b_i
	$\vdots$		$\vdots$
	0		$b_p - a_{pj}b_i/a_{ij}$
	0		$f - R - c_jb_i/a_{ij}$

C'est le saut sur un sommet voisin. La valeur de la fonction, qui était R , s'est accrue de $c_jb_i/a_{ij} \geq 0$.

Méthode du simplexe II : implémentation

- Lorsqu'il n'y a plus de terme > 0 dans la ligne résultat :

Méthode du simplexe II : implémentation

- Lorsqu'il n'y a plus de terme > 0 dans la ligne résultat :
Barrer les colonnes à la verticale d'éléments $\neq 0$ de la ligne résultat gauche.

$0 \dots 0$	$r_i < 0$	$0 \dots 0$	$r_j < 0$	$0 \dots 0$	$f - f_{\max}$

Méthode du simplexe II : implémentation

- Lorsqu'il n'y a plus de terme > 0 dans la ligne résultat :
Barrer les colonnes à la verticale d'éléments $\neq 0$ de la ligne résultat gauche. Chaque variable correspondante est $= 0$.

$0 \dots 0$	$r_i < 0$	$0 \dots 0$	$r_j < 0$	$0 \dots 0$	$f - f_{\max}$

$$x_i = 0$$

$$s_j = 0$$

Méthode du simplexe II : implémentation

- Lorsqu'il n'y a plus de terme > 0 dans la ligne résultat :
Barrer les colonnes à la verticale d'éléments $\neq 0$ de la ligne résultat gauche. Chaque variable correspondante est $= 0$.
Déterminer les autres variables en résolvant le système linéaire (S).

						} (S)
$0 \dots 0$	$r_i < 0$	$0 \dots 0$	$r_j < 0$	$0 \dots 0$	$f - f_{\max}$	

$$x_i = 0$$

$$s_j = 0$$

Méthode du simplexe II : implémentation

- Lorsqu'il n'y a plus de terme > 0 dans la ligne résultat :
Barrer les colonnes à la verticale d'éléments $\neq 0$ de la ligne résultat gauche. Chaque variable correspondante est $= 0$.
Déterminer les autres variables en résolvant le système linéaire (S).

						} (S)
$0 \dots 0$	$r_i < 0$	$0 \dots 0$	$r_j < 0$	$0 \dots 0$	$f - f_{\max}$	

$$x_i = 0$$

$$s_j = 0$$

$\Rightarrow$ On obtient le maximum $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Méthode du simplexe II : implémentation

- Lorsqu'il n'y a plus de terme > 0 dans la ligne résultat :
Barrer les colonnes à la verticale d'éléments $\neq 0$ de la ligne résultat gauche. Chaque variable correspondante est $= 0$.
Déterminer les autres variables en résolvant le système linéaire (S).

						} (S)
$0 \dots 0$	$r_i < 0$	$0 \dots 0$	$r_j < 0$	$0 \dots 0$	$f - f_{\max}$	

$$x_i = 0$$

$$s_j = 0$$

$\Rightarrow$ On obtient le maximum $(x_1, x_2, \dots, x_n)$; la valeur maximale $f_{\max}$ de f se lit dans la ligne résultat partie droite.

Reprenons l'exemple précédent :

$$\max_{(x,y)} f(x,y) = 150x + 450y$$

$$x \leq 120$$

$$y \leq 70$$

$$x + y \leq 140$$

$$x + 2y \leq 180$$

$$x, y \geq 0 \quad (S)$$

Reprenons l'exemple précédent :

$$\max_{(x,y)} f(x,y) = 150x + 450y$$

$$x \leq 120$$

$$y \leq 70$$

$$x + y \leq 140$$

$$x + 2y \leq 180$$

$$x, y \geq 0 \quad (S)$$

x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
1	0	1	0	0	0	120
0	1	0	1	0	0	70
1	1	0	0	1	0	140
1	2	0	0	0	1	180
150	450	0	0	0	0	$f - 0$

x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
1	0	1	0	0	0	120
0	1	0	1	0	0	70
1	1	0	0	1	0	140
1	2	0	0	0	1	180
150	450	0	0	0	0	$f - 0$

x	y	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄		
1	0	1	0	0	0	120	
0	1	0	1	0	0	70	(L)
1	1	0	0	1	0	140	-(L)
1	2	0	0	0	1	180	-2(L)
150	<u>450</u>	0	0	0	0	f - 0	-450(L)

x	y	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄		
1	0	1	0	0	0	120	
0	1	0	1	0	0	70	(L)
1	1	0	0	1	0	140	-(L)
1	2	0	0	0	1	180	-2(L)
150	450	0	0	0	0	f - 0	-450(L)

x	y	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄		
1	0	1	0	0	0	120	
0	1	0	1	0	0	70	
1	0	0	-1	1	0	70	
1	0	0	-2	0	1	40	
150	0	0	-450	0	0	f - 31500	

x	y	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄		
1	0	1	0	0	0	120	
0	1	0	1	0	0	70	(L)
1	1	0	0	1	0	140	-(L)
1	2	0	0	0	1	180	-2(L)
150	450	0	0	0	0	f - 0	-450(L)

x	y	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄		
1	0	1	0	0	0	120	-(L)
0	1	0	1	0	0	70	
1	0	0	-1	1	0	70	-(L)
1	0	0	-2	0	1	40	(L)
150	0	0	-450	0	0	f - 31500	-150(L)

x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	0	1	1	0	-1	80
0	1	0	1	0	0	70
0	0	0	0	1	-1	30
1	0	0	-2	0	1	40
0	0	0	-300	0	-150	$f - 37500$

x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	0	1	1	0	-1	80
0	1	0	1	0	0	70
0	0	0	0	1	-1	30
1	0	0	-2	0	1	40
0	0	0	-300	0	-150	$f - 37500$

x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	0	1	1	0	-1	80
0	1	0	1	0	0	70
0	0	0	0	1	-1	30
1	0	0	-2	0	1	40
0	0	0	-300	0	-150	$f - 37500$

On obtient pour maximum $x_1 = 40$, $x_2 = 70$, et $f_{\max} = 37500$.
($s_1 = 80$, $s_2 = 0$, $s_3 = 30$, $s_4 = 0$).

Ecrire un problème max sous forme normale

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

L'insérer dans le tableau, sans ajouter de variable d'écart.

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

L'insérer dans le tableau, sans ajouter de variable d'écart.

- En l'absence de la contrainte de signe : (S) : $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, c'est à dire si $x_i \not\geq 0$.

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

L'insérer dans le tableau, sans ajouter de variable d'écart.

- En l'absence de la contrainte de signe : (S) : $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, c'est à dire si $x_i \not\geq 0$. Poser $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+, x_i^- \geq 0$.

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

L'insérer dans le tableau, sans ajouter de variable d'écart.

- En l'absence de la contrainte de signe : (S) : $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, c'est à dire si $x_i \not\geq 0$. Poser $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+, x_i^- \geq 0$.

- Si $\mathbf{c} \not\geq \mathbf{0}$.

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

L'insérer dans le tableau, sans ajouter de variable d'écart.

- En l'absence de la contrainte de signe : (S) : $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, c'est à dire si $x_i \not\geq 0$. Poser $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+, x_i^- \geq 0$.

- Si $\mathbf{c} \not\geq \mathbf{0}$.

Si $c_i < 0$: poser $x_i = 0$. Dans la matrice de la méthode du simplexe cela revient à barrer (=supprimer) la colonne correspondante.

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

L'insérer dans le tableau, sans ajouter de variable d'écart.

- En l'absence de la contrainte de signe : (S) : $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, c'est à dire si $x_i \not\geq 0$. Poser $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+, x_i^- \geq 0$.

- Si $\mathbf{c} \not\geq \mathbf{0}$.

Si $c_i < 0$: poser $x_i = 0$. Dans la matrice de la méthode du simplexe cela revient à barrer (=supprimer) la colonne correspondante.

- Si $\mathbf{b} \not\geq \mathbf{0}$.

Ecrire un problème max sous forme normale

- En présence de contrainte égalitaires.

L'insérer dans le tableau, sans ajouter de variable d'écart.

- En l'absence de la contrainte de signe : (S) : $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, c'est à dire si $x_i \not\geq 0$. Poser $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+, x_i^- \geq 0$.

- Si $\mathbf{c} \not\geq \mathbf{0}$.

Si $c_i < 0$: poser $x_i = 0$. Dans la matrice de la méthode du simplexe cela revient à barrer (=supprimer) la colonne correspondante.

- Si $\mathbf{b} \not\geq \mathbf{0}$.

Si $b_i < 0$. Changer la contrainte inégalitaire en contrainte égalitaire en insérant une nouvelle variable $p_i \geq 0$.

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq -|b_i|$$

$$\iff -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n - p_i = |b_i| \quad \text{avec } p_i \geq 0$$

Changer un problème min en problème max

Changer un problème min en problème max

Théorème (Dualité min/max)

Un problème de minimisation en programmation linéaire est équivalent à un problème de maximisation dans le sens suivant :

$$\min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle$$

$$A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

$\iff$

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Changer un problème min en problème max

Théorème (Dualité min/max)

Un problème de minimisation en programmation linéaire est équivalent à un problème de maximisation dans le sens suivant :

$$\min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle$$

$$A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

$\iff$

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- $g_{\min} = f_{\max}$

Changer un problème min en problème max

Théorème (Dualité min/max)

Un problème de minimisation en programmation linéaire est équivalent à un problème de maximisation dans le sens suivant :

$$\min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle$$

$$A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- $g_{\min} = f_{\max}$,
- *un minimum de g a pour coordonnées les opposés des valeurs dans la ligne résultat à la verticale des variables d'écart du problème de maximisation.*

Exemple de problème de minimisation

On considère le problème de minimisation :

$$\min_{x,y} 2x + 8y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 500 \\ 900 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

$$x, y \geq 0$$

Exemple de problème de minimisation

Avec le théorème de dualité min/max, il est équivalent au problème de maximisation :

$$\max_{x_1, \dots, x_5} 100x_1 + 100x_2 + 500x_3 + 900x_4 + 1200x_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Exemple de problème de minimisation

Avec le théorème de dualité min/max, il est équivalent au problème de maximisation :

$$\max_{x_1, \dots, x_5} 100x_1 + 100x_2 + 500x_3 + 900x_4 + 1200x_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

qui est sous forme normale. On le résout par la méthode du simplexe.

Exemple de problème de minimisation

1	0	1	1	3	1	0	2
0	1	1	3	2	0	1	8
100	100	500	900	1200	0	0	$f - 0$

Exemple de problème de minimisation

1	0	1	1	3	1	0	2
0	1	1	3	2	0	1	8
100	100	500	900	1200	0	0	$f - 0$
1	0	1	1	3	1	0	2
$-2/3$	1	$1/3$	$7/3$	0	$-2/3$	1	$20/3$
-300	100	100	500	0	-400	0	$f - 800$

Exemple de problème de minimisation

1	0	1	1	3	1	0	2
0	1	1	3	2	0	1	8
100	100	500	900	1200	0	0	$f - 0$
1	0	1	1	3	1	0	2
$-2/3$	1	$1/3$	$7/3$	0	$-2/3$	1	$20/3$
-300	100	100	500	0	-400	0	$f - 800$
1	0	1	1	3	1	0	2
-3	1	-2	0	-7	-3	1	2
-800	100	-400	0	-1500	-900	0	$f - 1800$

Exemple de problème de minimisation

1	0	1	1	3	1	0	2
-3	1	-2	0	-7	-3	1	2
-900	0	-200	0	-800	-600	-100	$f - 2000$

Exemple de problème de minimisation

1	0	1	1	3	1	0	2
-3	1	-2	0	-7	-3	1	2
-900	0	-200	0	-800	-600	-100	$f - 2000$

$$\Rightarrow x_{min} = 600 ; y_{min} = 100 ; f_{min} = 2000 .$$

Exemple de problème de minimisation

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\
 -3 & 1 & -2 & 0 & -7 & -3 & 1 & 2 \\
 \hline
 -900 & 0 & -200 & 0 & -800 & -600 & -100 & f - 2000
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_{\min} = 600 ; y_{\min} = 100 ; f_{\min} = 2000 .$$

Remarque. En fait c'est plus facile à résoudre dans un problème min que dans un problème max : inutile de résoudre un système linéaire pour trouver la valeur des variables.

Programmation linéaire en nombres entiers

Programmation linéaire en nombres entiers

Attention, lorsque un problème d'optimisation linéaire cherche une solution entière (c'est à dire à coordonnées entières), tout ce que l'on a vu jusqu'à présent ne s'applique pas !

Programmation linéaire en nombres entiers

Attention, lorsque un problème d'optimisation linéaire cherche une solution entière (c'est à dire à coordonnées entières), tout ce que l'on a vu jusqu'à présent ne s'applique pas !

La méthode du simplexe donne l'optimum sur les réels et non sur les entiers.

Programmation linéaire en nombres entiers

Attention, lorsque un problème d'optimisation linéaire cherche une solution entière (c'est à dire à coordonnées entières), tout ce que l'on a vu jusqu'à présent ne s'applique pas !

La méthode du simplexe donne l'optimum sur les réels et non sur les entiers.

Un tel problème s'appelle un problème de programmation linéaire en nombre entiers (PLNE), et c'est un domaine de recherche spécifique, utilisant ses outils propres (optimisation combinatoire), que nous ne développerons pas ici.

Programmation linéaire en nombres entiers

Attention, lorsque un problème d'optimisation linéaire cherche une solution entière (c'est à dire à coordonnées entières), tout ce que l'on a vu jusqu'à présent ne s'applique pas !

La méthode du simplexe donne l'optimum sur les réels et non sur les entiers.

Un tel problème s'appelle un problème de programmation linéaire en nombre entiers (PLNE), et c'est un domaine de recherche spécifique, utilisant ses outils propres (optimisation combinatoire), que nous ne développerons pas ici.

Prendre un arrondi entier d'un optimum ne fournit pas en général l'optimum en nombre entiers !

Exemple de PLNE

Soit le problème :

$$\max_{x,y} x + 4y$$

$$y \geq 0,$$

$$4 \geq x \geq 0$$

$$425x + 200y \leq 670$$

Exemple de PLNE

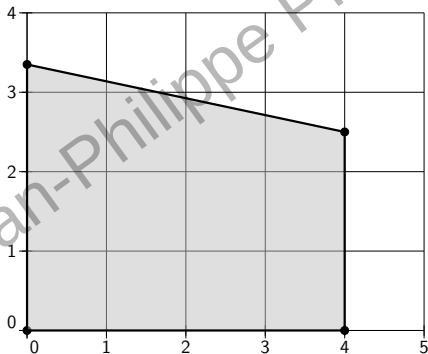
Soit le problème :

$$\max_{x,y} x + 4y$$

$$y \geq 0,$$

$$4 \geq x \geq 0$$

$$425x + 200y \leq 670$$



Le domaine admissible.

Exemple de PLNE

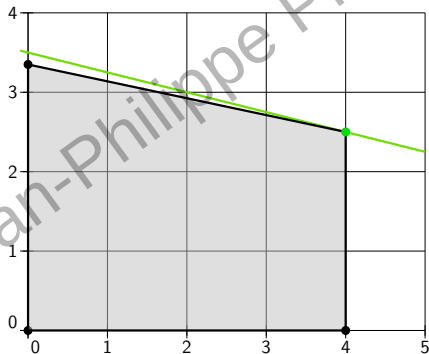
Soit le problème :

$$\max_{x,y} x + 4y$$

$$y \geq 0,$$

$$4 \geq x \geq 0$$

$$425x + 200y \leq 670$$



Le maximum est atteint au point (4, 2.5).

Exemple de PLNE

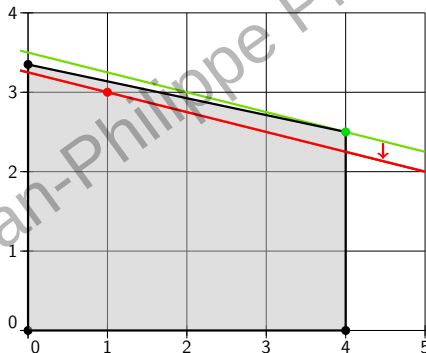
Soit le problème :

$$\max_{x,y} x + 4y$$

$$y \geq 0,$$

$$4 \geq x \geq 0$$

$$425x + 200y \leq 670$$



Le maximum est atteint au point (4, 2.5).

Le maximum du problème en nombres entiers est (1, 3).

Exercices

▶ Exercice 1.

▶ Exercice 2.

▶ Exercice 3.

Exercice 1. Énoncé

Une usine produit deux types de produits finis x et y à partir d'une même matière première.

Exercice 1. Énoncé

Une usine produit deux types de produits finis x et y à partir d'une même matière première. Les produits x et y lui rapportent à la vente respectivement 8 et 4 euros le litre.

Exercice 1. Énoncé

Une usine produit deux types de produits finis x et y à partir d'une même matière première. Les produits x et y lui rapportent à la vente respectivement 8 et 4 euros le litre. La quantité de x et y produits est limitée par le stock de matière première disponible et par la durée du temps de travail.

Exercice 1. Énoncé

Une usine produit deux types de produits finis x et y à partir d'une même matière première. Les produits x et y lui rapportent à la vente respectivement 8 et 4 euros le litre. La quantité de x et y produits est limitée par le stock de matière première disponible et par la durée du temps de travail. La fabrication d'un litre de produit x (resp. y) nécessite 1kg (resp. 1kg) de matière première.

Exercice 1. Énoncé

Une usine produit deux types de produits finis x et y à partir d'une même matière première. Les produits x et y lui rapportent à la vente respectivement 8 et 4 euros le litre. La quantité de x et y produits est limitée par le stock de matière première disponible et par la durée du temps de travail. La fabrication d'un litre de produit x (resp. y) nécessite 1kg (resp. 1kg) de matière première. Il faut 15 heures de travail pour fabriquer 100l de x tandis qu'il faut 3 heures pour fabriquer 100l de y .

Exercice 1. Enoncé

Une usine produit deux types de produits finis x et y à partir d'une même matière première. Les produits x et y lui rapportent à la vente respectivement 8 et 4 euros le litre. La quantité de x et y produits est limitée par le stock de matière première disponible et par la durée du temps de travail. La fabrication d'un litre de produit x (resp. y) nécessite 1kg (resp. 1kg) de matière première. Il faut 15 heures de travail pour fabriquer 100l de x tandis qu'il faut 3 heures pour fabriquer 100l de y . On dispose de 1t de matière première et de 45 heures de travail chaque semaine.

Exercice 1. Énoncé

Une usine produit deux types de produits finis x et y à partir d'une même matière première. Les produits x et y lui rapportent à la vente respectivement 8 et 4 euros le litre. La quantité de x et y produits est limitée par le stock de matière première disponible et par la durée du temps de travail. La fabrication d'un litre de produit x (resp. y) nécessite 1kg (resp. 1kg) de matière première. Il faut 15 heures de travail pour fabriquer 100l de x tandis qu'il faut 3 heures pour fabriquer 100l de y . On dispose de 1t de matière première et de 45 heures de travail chaque semaine.

Appliquer la méthode du simplexe pour maximiser le profit hebdomadaire.

← Retour

Exercice 1 : Formulation

On note x, y les quantités en litre de produits finis.

La fonction économique à maximiser -qui représente le bénéfice brut- est :

$$f(x, y) = 8x + 4y$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ 15x + 3y \leq 4500 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 1 : Méthode du simplexe

1	1	1	0	1000
15	3	0	1	4500
8	4	0	0	$f - 0$

Exercice 1 : Méthode du simplexe

1	1	1	0	1000	$-\frac{1}{15} /$
15	3	0	1	4500	$/$
8	4	0	0	$f - 0$	$-\frac{8}{15} /$

Exercice 1 : Méthode du simplexe

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\
 \boxed{15} & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 8 & 4 & 0 & 0 & f - 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -\frac{1}{15} / \\
 / \\
 -\frac{8}{15} /
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & \boxed{4/5} & 1 & -1/15 & 700 \\
 15 & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 0 & 12/5 & 0 & -8/15 & f - 2400
 \end{array}
 /$$

Exercice 1 : Méthode du simplexe

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\
 \boxed{15} & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 8 & 4 & 0 & 0 & f - 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -\frac{1}{15} / \\
 / \\
 -\frac{8}{15} /
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & \boxed{4/5} & 1 & -1/15 & 700 \\
 15 & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 0 & 12/5 & 0 & -8/15 & f - 2400
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 / \\
 -\frac{15}{4} / \\
 -3/
 \end{array}$$

Exercice 1 : Méthode du simplexe

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\
 \boxed{15} & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 8 & 4 & 0 & 0 & f - 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -\frac{1}{15} / \\
 / \\
 -\frac{8}{15} /
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & \boxed{4/5} & 1 & -1/15 & 700 \\
 15 & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 0 & 12/5 & 0 & -8/15 & f - 2400
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 / \\
 -\frac{15}{4} / \\
 -3 /
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 4/5 & 1 & -1/15 & 700 \\
 15 & 0 & -15/4 & 5/4 & 1875 \\
 \hline
 0 & 0 & -3 & -1/3 & f - 4500
 \end{array}$$

Exercice 1 : Méthode du simplexe

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\
 \boxed{15} & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 8 & 4 & 0 & 0 & f - 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -\frac{1}{15} / \\
 / \\
 -\frac{8}{15} /
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & \boxed{4/5} & 1 & -1/15 & 700 \\
 15 & 3 & 0 & 1 & 4500 \\
 \hline
 0 & 12/5 & 0 & -8/15 & f - 2400
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 / \\
 -\frac{15}{4} / \\
 -3 /
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 4/5 & 1 & -1/15 & 700 \\
 15 & 0 & -15/4 & 5/4 & 1875 \\
 \hline
 0 & 0 & -3 & -1/3 & f - 4500
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \Rightarrow y = 875 \\
 \Rightarrow x = 125 \\
 f_{\max} = 4500
 \end{array}$$

Exercice 1 : Méthode du simplexe

1	1	1	0	1000	$-\frac{1}{15} /$
15	3	0	1	4500	$/$
8	4	0	0	$f - 0$	$-\frac{8}{15} /$
0	4/5	1	$-1/15$	700	$/$
15	3	0	1	4500	$-\frac{15}{4} /$
0	12/5	0	$-8/15$	$f - 2400$	$-3 /$
0	4/5	1	$-1/15$	700	$\Rightarrow y = 875$
15	0	$-15/4$	$5/4$	1875	$\Rightarrow x = 125$
0	0	-3	$-1/3$	$f - 4500$	$f_{\max} = 4500$

Il faut produire 125 l de produit x et 875 l de produit y pour maximiser le bénéfice à 4500€. On a pleinement utilisé le stock et la main d'oeuvre.

[Retour.](#)

Exercice 2. Enoncé

Une fonderie fabrique 3 qualités de bronze à partir de cuivre et d'étain, en proportions variables. Elle dispose d'une quantité mensuelle de 65 tonnes de cuivre et de 5 tonnes d'étain.

Qualité	Bénéfice brut (K€/t)	% cuivre	% étain
A	2	90	10
B	1.6	93	7
C	1.8	95	5

Quelle production maximise le bénéfice mensuel ?

[Retour](#)

Exercice 2. Formulation

Notons :

- x la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité A .
- y la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité B .
- z la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité C .

Exercice 2. Formulation

Notons :

- x la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité A .
- y la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité B .
- z la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité C .

La fonction bénéfice brut mensuel à maximiser s'écrit :

$$f(x, y, z) = 2x + 1.6y + 1.8z$$

Exercice 2. Formulation

Notons :

- x la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité A .
- y la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité B .
- z la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité C .

La fonction bénéfice brut mensuel à maximiser s'écrit :

$$f(x, y, z) = 2x + 1.6y + 1.8z$$

sous les contraintes inégalitaires :

$$90x + 93y + 95z \leq 6500$$

$$10x + 7y + 5z \leq 500$$

$$x, y, z \geq 0$$

Exercice 2. Méthode du simplexe

90	93	95	1	0	6500
10	7	5	0	1	500
2	1.6	1.8	0	0	$f - 0$

Exercice 2. Méthode du simplexe

90	93	95	1	0	6500
<u>10</u>	7	5	0	1	500
2	1.6	1.8	0	0	$f - 0$

0	30	<u>50</u>	1	-9	2000
10	7	5	0	1	500
0	0.2	0.8	0	-0.2	$f - 100$

Exercice 2. Méthode du simplexe

90	93	95	1	0	6500	0	30	50	1	-9	2000
10	7	5	0	1	500	10	7	5	0	1	500
2	1.6	1.8	0	0	$f - 0$	0	0.2	0.8	0	-0.2	$f - 100$

0	30	50	1	-9	2000	$\Rightarrow x_3 = 40$
10	4	0	-0.1	1.9	300	$\Rightarrow x_1 = 30$
0	-0.28	0	-0.016	-1.856	$f - 132$	$\Rightarrow f_{\max} = 132$

Exercice 2. Méthode du simplexe

90	93	95	1	0	6500	0	30	50	1	-9	2000
10	7	5	0	1	500	10	7	5	0	1	500
2	1.6	1.8	0	0	$f - 0$	0	0.2	0.8	0	-0.2	$f - 100$

0	30	50	1	-9	2000	$\Rightarrow x_3 = 40$
10	4	0	-0.1	1.9	300	$\Rightarrow x_1 = 30$
0	-0.28	0	-0.016	-1.856	$f - 132$	$\Rightarrow f_{\max} = 132$

On obtient $x_1 = 30$, $x_2 = 0$, $x_3 = 40$, pour $f_{\max} = 132$. Il faut produire 30t, 0t et 40t, respectivement de bronze de qualités A, B, C, pour un bénéfice maximal de 132000 €. Les stocks de cuivre et d'étain sont épuisés ($s_1 = s_2 = 0$).

Exercice 3.a. Enoncé

Problème du consommateur. On peut acheter 4 types d'aliments, dont la teneur en glucides et lipides est donnée dans le tableau suivant (par unité de poids et exprimé en unités convenable) :

	type 1	type 2	type 3	type 4
glucides	2	1	0	1
lipides	1	2.5	2	4.5
prix	2	2	1	8

Le *problème du consommateur* consiste à obtenir au moindre coût au moins 12 unités de glucides et 7 unités de lipides.

[← Retour](#)

Formulation

En notant x_1, x_2, x_3, x_4 les quantités de chaque type d'aliment :

Formulation

En notant x_1, x_2, x_3, x_4 les quantités de chaque type d'aliment :

$$\begin{aligned} & \min_{x_1, \dots, x_4} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 \\ & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 \geq 12 \\ x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 + 4.5x_4 \geq 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Formulation

En notant x_1, x_2, x_3, x_4 les quantités de chaque type d'aliment :

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_4} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_4 \geq 12 \\ x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 + 4.5x_4 \geq 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par dualité min/max, il est équivalent au problème :

$$\begin{aligned} \max_{y_1, y_2} \quad & 12y_1 + 7y_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 + 2.5y_2 \geq 2 \\ 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + 4.5y_2 \geq 8 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exercice 3.a. Méthode du simplexe

Exercice 3.a. Méthode du simplexe

2	1	1	0	0	0	2
1	2.5	0	1	0	0	2
0	2	0	0	1	0	1
1	4.5	0	0	0	1	8
12	7	0	0	0	0	$f - 0$

Exercice 3.a. Méthode du simplexe

2	1	1	0	0	0	2
1	2.5	0	1	0	0	2
0	2	0	0	1	0	1
1	4.5	0	0	0	1	8
12	7	0	0	0	0	$f - 0$

2	1	1	0	0	0	2
0	2	-0.5	1	0	0	1
0	2	0	0	1	0	1
0	4	-0.5	0	0	1	7
0	1	-6	0	0	0	$f - 12$

Exercice 3.a. Méthode du simplexe

2	1	1	0	0	0	2	2	1	1	0	0	0	2
1	2.5	0	1	0	0	2	0	2	-0.5	1	0	0	1
0	2	0	0	1	0	1	0	2	0	0	1	0	1
1	4.5	0	0	0	1	8	0	4	-0.5	0	0	1	7
12	7	0	0	0	0	$f - 0$	0	1	-6	0	0	0	$f - 12$

2	0	1	0	-0.5	0	1.5
0	0	-0.5	1	-1	0	0
0	2	0	0	1	0	1
0	0	-0.5	0	-2	1	5
0	0	-6	0	-0.5	0	$f - 12.5$

Exercice 3.a. Méthode du simplexe

2	1	1	0	0	0	2	2	1	1	0	0	0	2
1	2.5	0	1	0	0	2	0	2	-0.5	1	0	0	1
0	2	0	0	1	0	1	0	2	0	0	1	0	1
1	4.5	0	0	0	1	8	0	4	-0.5	0	0	1	7
12	7	0	0	0	0	$f - 0$	0	1	-6	0	0	0	$f - 12$

2	0	1	0	-0.5	0	1.5
0	0	-0.5	1	-1	0	0
0	2	0	0	1	0	1
0	0	-0.5	0	-2	1	5
0	0	-6	0	-0.5	0	$f - 12.5$

Il faut acheter 6 u.p. d'aliment de type 1, 0.5u.p. d'aliment de type 3, et aucun aliment de types 2,4. Pour un coût de 12.5 u.m. on obtient 12 u. de glucides et 7 u. de lipides.

Exercice 3.b. Enoncé

Problème du concurrent. Un vendeur concurrent souhaite s'approprier ce marché avec 2 nouveaux types d'aliment, dont les teneurs respectives en glucides et lipides sont données dans le tableau suivant (toujours exprimé par unité de volume dans l'unité convenable) :

	type 1	type 2
glucides	1	0
lipides	0	1

Il cherche à déterminer les prix de chacun de ces 2 produits lui permettant d'être le plus compétitif, tout en retirant le bénéfice maximal.

Déterminer les prix optimaux de ces 2 aliments.

Exercice 3.b. Formulation

En appelant y_1, y_2 le prix par unité de volume des aliments 1 et 2, il s'agit de maximiser la fonction (c'est la gain obtenu pour l'achat permettant d'obtenir 12u. de glucides et 7u. de lipides) :

$$g(y_1, y_2) = 12y_1 + 7y_2$$

Exercice 3.b. Formulation

En appelant y_1, y_2 le prix par unité de volume des aliments 1 et 2, il s'agit de maximiser la fonction (c'est la gain obtenu pour l'achat permettant d'obtenir 12u. de glucides et 7u. de lipides) :

$$g(y_1, y_2) = 12y_1 + 7y_2$$

Pour être compétitif le coût de ses produits pour obtenir la même quantité de glucides et lipides que dans les produits concurrents doit leur être inférieur ou égal. Cela s'exprime :

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1 + 2.5y_2 \leq 2 \\ 2y_2 \leq 1 \\ y_1 + 4.5y_2 \leq 8 \end{cases}$$

Exercice 3.b. Formulation

En appelant y_1, y_2 le prix par unité de volume des aliments 1 et 2, il s'agit de maximiser la fonction (c'est le gain obtenu pour l'achat permettant d'obtenir 12u. de glucides et 7u. de lipides) :

$$g(y_1, y_2) = 12y_1 + 7y_2$$

Pour être compétitif le coût de ses produits pour obtenir la même quantité de glucides et lipides que dans les produits concurrents doit leur être inférieur ou égal. Cela s'exprime :

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1 + 2.5y_2 \leq 2 \\ 2y_2 \leq 1 \\ y_1 + 4.5y_2 \leq 8 \end{cases}$$

Ce problème n'est rien d'autre que le problème max dual du problème du consommateur.

Exercice 3.b Méthode du simplexe

On lui a déjà appliqué la méthode du simplexe :

2	0	1	0	-0.5	0	1.5
0	0	-0.5	1	-1	0	0
0	2	0	0	1	0	1
0	0	-0.5	0	-2	1	5
0	0	-6	0	-0.5	0	$f - 12.5$

Exercice 3.b Méthode du simplexe

On lui a déjà appliqué la méthode du simplexe :

2	0	1	0	-0.5	0	1.5	$\Rightarrow y_1 = 0.75$
0	0	-0.5	1	-1	0	0	
0	2	0	0	1	0	1	$\Rightarrow y_2 = 0.5$
0	0	-0.5	0	-2	1	5	
0	0	-6	0	-0.5	0	$f - 12.5$	

On obtient : $y_1 = 0.75 \text{ u.m.}$ et $y_2 = 0.5 \text{ u.m.}$

◀ Retour.