Programmation linéaire et recherche opérationnelle

Ioan Todinca

Ioan.Todinca@univ-orleans.fr
tél. 02 38 41 72 93
bureau : en bas à gauche

Recherche opérationnelle

Tentative de définition

Ensemble de méthodes (algorithmiques, mathématiques, modélisation) afin de prendre des décisions optimales ou proches de l'optimum dans des problèmes complexes, qui traitent de la maximisation d'un profit ou la minimisation d'un coût.

- Comment aller le plus vite d'Orléans à Berlin, en voiture?
- Comment ordonnancer les tâches d'un projet en fonction de la main d'œuvre, tout en minimisant sa durée?
- Comment investir ses 1000 euros d'économie de sorte à maximiser le profit obtenu après deux ans?

Des problèmes de RO que vous savez résoudre

- Trouver un (plus court) chemin entre deux villes
  →plus courts chemins dans les graphes
- Broadcast de coût minimum dans un réseau
  → arbres recouvrants de poids minimum.
- Envoi d'un maximum d'information dans un réseau
  → problème du flot maximum.

Programmation linéaire

Les problèmes de programmation linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires.

- *Modélisation* d'un problème réel
- Si l'on constate que ce problème s'exprime comme un PL, le *résoudre*

Pourquoi un cours sur la programmation linéaire?

Objectif : apprendre à *modéliser* les problèmes réels et à *résoudre les programmes linéaires*.

- De nombreux problèmes réels peuvent être exprimés comme des programmes linéaires.
- Les programmes linéaires peuvent être résolus efficacement par certains algorithmes.
- Ce sont d'excellents exemples de questions pratiques dont la résolution nécessite une combinaison de méthodes *algorithmiques*, de *mathématiques* élémentaires et de *bon sens*.

Plan du cours

1. Introduction + une approche naïve : la méthode graphique
2. L'algorithme du simplexe
3. Simplexe : comment éviter les pièges
4. Dualité
5. Programmation linéaire en nombres entiers

Bibliographe : [V. Chvátal, *Linear Programming*]

Un exemple : le problème

Considérons un agriculteur qui possède des terres, de superficie égale à H hectares, dans lesquelles il peut planter du blé et du maïs. L'agriculteur possède une quantité E d'engrais et I d'insecticide. Le blé nécessite une quantité E_b d'engrais par hectare et I_b d'insecticide par hectare. Les quantités correspondantes pour le maïs sont notées E_m et I_m.

Soit P_b le prix de vente du blé et P_m celui du maïs. Si l'on note par x_b et x_m le nombre d'hectares à planter en blé et en maïs, comment exprimer le fait que l'agriculteur souhaite maximiser son gain, tout en restant dans les limites de ses ressources?

Le même exemple après modélisation

maximiser	$P_bx_b + P_mx_m$	(maximiser le revenu net)
contraintes	$x_b + x_m \leq H$	(surface)
	$x_b \geq 0$	
	$x_m \geq 0$	
	$E_bx_b + E_mx_m \leq E$	(engrais)
	$I_bx_b + I_mx_m \leq I$	(insecticide)

Programme linéaire : définition

- Variables *réelles* :
  $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Fonction objectif linéaire, à optimiser (min ou max) :
  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
- Contraintes linéaires (égalités ou inégalités) :
  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$
  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$
  $\cdots$
  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Solution : toute affectation des variables qui respecte les contraintes
Solution optimale : solution qui optimise (maximise ou minimise) la fonction objectif.

Un autre exemple

Vous disposez de 10000 euros que vous souhaitez investir. Votre banque vous propose trois types d'investissements. Pour l'investissement A le rendement est de 9% et la somme maximum que l'on peut investir est de 4000 euros. Pour l'investissement B on peut investir jusqu'à 5000 euros, avec un rendement de 4%. Enfin le produit C a un rendement de 8% pour un montant maximum de 5000 euros.

1. Exprimer ce problème comme un PL. Donner la solution optimale.
2. La banque change d'avis. Si vous souhaitez faire un investissement (A, B ou C) il faut y mettre la somme exacte (respectivement 4000, 5000, et 5000 euros). Mettre à jour votre modèle ; est-ce toujours un PL?

La méthode graphique

Idée : représenter graphiquement les contraintes et visualiser l'ensemble des solutions. Identifier une solution optimale.

Exemple :

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{contraintes :} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \geq & -8 \\
& 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

La méthode graphique

- Variables : x et y (ou x_1 et x_2).
- L'ensemble de points qui satisfont une *équation* (égalité) linéaire forme une *droite*.
- Les points qui satisfont une *inégalité linéaire* forment un *demi-plan*.
- L'ensemble des solutions d'un ensemble de contraintes : *polygone convexe*.
- Solution optimale (si elle existe) : *sommet* du polygone.

Trois variables ou plus

- Variables : $x_1, \ldots, x_n$
- L'ensemble de points qui satisfont une *équation* (égalité) linéaire forme un *hyperplan*.
- Les points qui satisfont une *inégalité linéaire* forment un *demi-espace*.
- L'ensemble des solutions d'un ensemble de contraintes : *polyèdre convexe*.
- Solution optimale (si elle existe) : *sommet* du polyèdre.

Limites : précision ; maximum 3 variables.
Si vous arrivez à visualiser un PL avec 4 variables ou plus... pensez à consulter un bon psy.

Questions

- Donner un exemple de programme linéaire qui n'a pas de solution.
- Proposer un PL qui a des solutions, mais pas de solution optimale.
- Proposer un PL qui a plusieurs solutions optimales.
- Essayer de résoudre par la méthode graphique le système suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{objectif :} & \max 2x + y \\ \text{contraintes :} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

Algorithme du simplexe

[G. Dantzig, 1947]

- Algorithme de résolution de programmes linéaires
- Facile à comprendre et à implanter
- Efficace en pratique, même pour un nombre important de variables et de contraintes
- Efficacité au pire cas : on en reparlera, voir aussi cours d'algorithmique.

PL sous forme standard

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Question : comment mettre un problème quelconque sous forme standard?

Simplexe : un exemple

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{max} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{contraintes} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Variables d'écart

PL équivalent :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\
x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\
\hline
z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3
\end{array}
$$

$$\max z, \text{sous contraintes : } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Solution initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $x_5 = 11$, $x_6 = 8$; $z = 0$.

Si on augmente x_1, ça augmente z!

Augmenter x_1

1. De combien ?
   $x_1 \leq \frac{5}{2}$ car $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0$.
2. Nouvelle solution ?
   $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = \frac{1}{2}$; $z = \frac{25}{2}$.
3. Reformuler le système afin d'exprimer les variables x_1, x_5, x_6 en fonction de x_2, x_3, x_4.
   $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

Nouveau dictionnaire

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 1 & + & 5x_2 & & & + & 2x_4 \\
x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 \\
\hline
z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{5}{4}x_4
\end{array}
$$

Augmenter qui?	De combien?	Qu'obtient-on?
x_3	$x_3 = 1$ ($x_6 = \ldots$)	à droite : x_2, x_3, x_6

Nouveau dictionnaire (et de trois...)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & x_2 & + & 3x_4 & - & 2x_6 \\
x_1 & = & 2 & - & 2x_2 & - & 2x_4 & + & x_6 \\
x_5 & = & 1 & + & 5x_2 & + & 2x_4 & & \\
\hline
z & = & 13 & - & 3x_2 & - & x_4 & - & x_6
\end{array}$$

Solution actuelle : $x_2 = x_4 = x_6 = 0, x_1 = 2, x_3 = 1, x_5 = 1$; objectif : $z = 13$

Peut-on faire mieux ? Non car $x_2, x_4, x_6 \geq 0$ et donc $z \leq 13$

Algorithme du simplexe : cas général

Entrée :

$$\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}$$

- On introduit m variables d'écart :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1 \ldots, m)$$

- La $i$ème contrainte devient $x_{n+i} \geq 0$.

Premier dictionnaire

$$\begin{array}{rcl}
x_{n+i} & = & b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, m) \\
z & = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
\end{array}$$

$\max z$, sous contraintes : $x_k \geq 0 \quad (k = 1, \ldots n + m)$

Dictionnaires : équivalents au PL d'origine

- $n + m + 1$ variables $x_1, \ldots, x_{n+m}$ et z
- m équations linéaires de type $x_k = \ldots$
- tous les membres droits ont les mêmes n variables
- objectif : $\max z$ sous contraintes ci-dessus plus $x_k \geq 0 \quad (k = 1, \ldots n + m)$

Dictionnaires : un peu de vocabulaire

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\
x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\
\hline
z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3
\end{array}$$

- Dictionaire faisable : en mettant à 0 toutes les variables des membres droits, on obtient une solution du PL
  - On suppose que notre premier dictionnaire est faisable
  - Nous verrons plus tard comment faire pour que ce soit toujours le cas
- Variables "de gauche" (sauf z) : variables de base x_4, x_5, x_6
- Variables "de droite" : variables hors base x_1, x_2, x_3

Vers une meilleure solution

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\
x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\
\hline
z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3
\end{array}
$$

1. Solution courante : variables hors base à 0
2. Trouver une variable hors base x_k dont le coefficient dans l'expression de z soit strictement positif.
3. S'il n'en existe pas, la solution courante est optimale!
4. Trouver la contrainte la plus forte pour l'augmentation de x_k ; soit $x_l = \cdots$ cette contrainte.
5. Augmenter x_k jusqu'à ce que l'on ait $x_l = 0$.
6. Exprimer x_k en fonction de x_l et des autres variables hors base.
7. Mettre à jour le dictionnaire, en faisant rentrer x_k dans la nouvelle base et en sortant x_l.

Algorithme du simplexe

Initialisation : introduire les variables d'écart et calculer un premier dictionnaire faisable ; mettre à 0 les variables hors base

tantque il existe une variable hors base x_k ayant un coeff positif dans l'expression de z **faire**

- soit $x_l = \cdots$ la contrainte la plus contraignante pour augmenter x_k
- pivoter afin de sortir x_l de la base en y faisant rentrer x_k

retourner la solution courante

Simplexe : un deuxième exemple

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{max} & 5x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{contraintes} & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
& -x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 2 \\
& 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Mise sous forme standard

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{min} & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{contraintes} & x_1 & + & x_2 & = & 10 \\
& x_1 & - & x_2 & \geq & -10 \\
& x_1 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

- $\min z$
  $\rightarrow \max -z$
- $\sum a_i x_i = b$
  $\rightarrow \sum a_i x_i \leq b$ et $\sum a_i x_i \geq b$
- $\sum a_i x_i \geq b$
  $\rightarrow \sum -a_i x_i \leq -b$
- pas de contrainte $x \geq 0$
  $\rightarrow$ on remplace x par $x^+ - x^-$, avec $x^+, x^- \geq 0$

Simplexe : les pièges

1. Difficulté à trouver une solution initiale
2. Itération : peut-on toujours augmenter strictement l'objectif?
3. Terminaison, complexité.

Itération

- Choix de la variable qui entre dans la base.
- Choix de la variable qui sort de la base.
  Et si aucune contrainte ne limite l'augmentation de la variable hors base?

Peut-on toujours augmenter strictement l'objectif?
Non. Il se peut que l'on ait une variable hors base avec coéfficient positif dans z, mais qu'elle ne puisse être augmentée à cause d'une contrainte.

Dictionnaires dégénérés

- Une ou plusieurs variables de base ont une valeur nulle.
- On ne peut augmenter aucune variable hors base.

On fait néanmoins un changement de base.
La valeur de l'objectif n'augmente pas
... mais ça devrait aller mieux dans quelques étapes.

Terminaison

Lemme

Si deux dictionnaires ont les mêmes variables de base, ils sont identiques.

Théorème

L'algorithme du simplexe termine sur une solution optimale, ou alors il boucle.

- Les cas de bouclage sont très rares.
- Le bouclage est facile à détecter.
- Il existe des solutions simples pour éviter le bouclage, par exemple en choisissant à chaque itération comme variables sortante et entrante celles d'indice minimum.

Complexité : nombre d'itérations

Dans la pratique :

- Le nombre d'itérations est proportionnel au nombre de contraintes initiales (typiquement entre $3m/2$ et $3m$).
- Croit très peu avec le nombre n de variables initiales.

En théorie (au pire cas) :

- Il existe des exemples qui nécessitent 2^n itérations [Klee, Minty 1972].
- Nombre de dictionnaires : autant que de bases possibles, donc $\binom{n+m}{m}$.

Initialisation : premier dictionnaire non faisable

- Trouver un autre dictionnaire faisable.
- Ou prouver que le problème n'a pas de solution!

La méthode du simplexe à deux phases : d'une pierre deux coups.

- Introduction d'un problème auxiliaire.
- En le résolvant, nous trouverons un dictionnaire faisable du problème initial ou bien nous saurons que notre problème n'a pas de solution.

Initialisation : le problème auxiliaire

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \ge 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

devient :

$$\begin{array}{lll} \min & x_0 & \\ \text{contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 \le b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \ge 0 & j = 0, 1, \ldots, n \end{array}$$

Initialisation : exemple

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{contraintes} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \le & 4 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \le & -5 \\ & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \le & -1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \ge & 0 \end{array}$$

Simplexe : interprétation géométrique

- Observer graphiquement l'évolution de l'algorithme du simplexe sur cet exemple :

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{contraintes :} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Chaque solution intermédiaire du simplexe correspond à un sommet du polyèdre des contraintes.
- Les "déplacements" d'une solution à la suivante se font le long des arêtes.

Introduction Méthode graphique Simplexe Dualité

Simplèxe par les tableaux

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{contraintes :} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Une autre vision du même algorithme
- Version très facilement implantable

Introduction Méthode graphique Simplexe Dualité

D'un tableau à l'autre

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
-1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
-1 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 8 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

- Choix de la colonne pivot : coefficient positif sur la dernière ligne. S'il n'en existe pas, l'optimum est atteint : $z = -t[m+1, n+m+1]$.
- Choix de la ligne pivot : celle qui minimise $\frac{s_i}{r_i}$ parmi toutes les lignes avec r_i positif (r_i, resp. s_i sont les éléments de la $i$ème ligne se trouvant sur la colonne pivot, resp. la dernière colonne.)

Introduction Méthode graphique Simplexe Dualité

Tableaux : changement de base

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
-1 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 8 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

- Diviser la ligne pivot par le coefficient pivot ($pivot := 1$)
- Annuler les autres coefficients de la colonne pivot : $L_i := L_i - r_i \cdot L_{pivot}$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
-\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
\frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 10 \\
-\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

... et on recommence

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & & 10 \\
-\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & 4 \\
\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & & 14 \\
\hline
\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & & -4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & & 4 \\
-\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & 4 \\
\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & & 14 \\
\hline
\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & & -4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & & 4 \\
0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & & 6 \\
\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & & 14 \\
\hline
\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & & -4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & & 4 \\
0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & & 6 \\
0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & & 8
\end{array}
$$

Dualité

Idée de base : associer au programme linéaire initial, appelé primal, un deuxième programme linéaire appelé le programme dual tel que :

- le dual a m variables (autant que de contraintes industrielles dans le primal)
- il a n contraintes industrielles (autant que de variables dans le primal)
- le dual est un problème de minimisation
- pour toute solution du dual et toute solution du primal, l'objectif du dual est supérieur ou égal à celui du primal

Primal :

$$
\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{contraintes} : & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Dual :

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{contraintes} : & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\
& y_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m
\end{array}
$$

Théorème (Dualité faible)

Pour toute solution du primal et toute solution du dual, z, l'objectif du primal, est inférieur ou égal à w, l'objectif du dual.

Preuve:

$$
\begin{array}{rcll}
z & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \text{contraintes dual :} c_j \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \\
& \leq & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j & \text{commutativité, associativité} \\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i & \text{contraintes primal :} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\
& \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \text{objectif dual} \\
& = & w &
\end{array}
$$

Dualité et applications

Théorème (Dualité)

Si le primal a une solution optimale $x_1^*, \dots, x_n^*$ alors le dual a une solution optimale $y_1^*, \dots, y_m^*$ et, pour ces solutions, l'objectif du primal est égal à l'objectif du dual :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Observation simple : le dual du dual est le primal. Donc le primal a une solution optimale si et seulement si le dual a une solution optimale.
Question : que peut-il se passer si le primal (ou le dual) n'a pas de solution, ou si le problème est non borné?

Applications du théorème de dualité

- Si le primal a beaucoup de contraintes et moins de variables, le simplexe sera plus efficace sur le problème dual!
- Le dernier dictionnaire du simplexe nous donnera simultanément une solution optimale pour le primal et pour le dual.
- Certification : si l'on a les solutions du primal du dual, on vérifie facilement leur optimalité.
- Si l'on a une solution du primal, on vérifiera assez facilement son optimalité!
- Interprétation économique : la solution optimale du dual nous dira s'il est intéressant d'investir plus pour augmenter certaines ressources.

Preuve du théorème de dualité

Soit
$$z = z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_i + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{n+i} x_{n+i}$$
l'expression de z dans le dernier dictionnaire obtenu par le simplexe.
On montre que
$$y_i^* := -\bar{c}_{n+i}$$

1. est une solution admissible du dual ;
2. satisfait
$$\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^* = z^*,$$

c'est donc une solution optimale du dual.

D'après le premier dictionnaire
$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
et d'après le dernier
$$z = z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{n+i} x_{n+i}$$
Par construction des dictionnaires, ces expréssions sont égales pour toute affectation des variables x_i (même les affectations qui ne sont pas des solutions admissibles)

$$
\begin{aligned}
z &= && \text{dernier dico}\\
&= z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{n+i} x_{n+i} && y_i^* = -\bar{c}_{n+i}\\
&= z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* x_{n+i} && x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\\
&= z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) && \text{comm., assoc.}\\
&= (z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i) + \sum_{j=1}^{n} (\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j && \text{premier dico}\\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
\end{aligned}
$$

$$(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*) + \sum_{j=1}^{n} (\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

En mettant $x_j := 0$, $j = 1, \ldots, n$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = z^*,$$

donc

$$w^* = z^*$$

(objectif primal = objectif dual).

L'égalité s'écrit maintenant :

$$\sum_{j=1}^{n} (\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Pour prouver que les y_i^* forment une solution du dual, remarquer que

- les coeffs de z dans le dernier dico sont ≤ 0 donc
$$y_i^* \geq 0 \,;$$
- Un prenant $x_j := 1$ et $x_k := 0$ pour tout $k \neq j$, $1 \leq k \leq n$ on a
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* + \bar{c}_j = c_j$$
donc, puisque les $\bar{c}_j$ sont négatifs ou nuls,
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j.$$

Comment interpréter la solution optimale du dual?

Théorème (Ecarts complémentaires)

Soient $x_1^*, \ldots, x_n^*$ une solution du primal et $y_1^*, \ldots, y_m^*$ une solution du primal. Ces deux solutions sont simultanément optimales si et seulement si

1. *pour tout $j = 1, \ldots, n$,*
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ ou } x_j^* = 0 \text{ (ou les deux)}$$
2. *et pour tout $i = 1, \ldots, m$,*
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ ou } y_i^* = 0 \text{ (ou les deux)}$$

Rappel :

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j && \text{contraintes dual} : c_j \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \\
&\le \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\Big) x_j && \text{commutativité, associativité} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) y_i && \text{contraintes primal} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \\
&\le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i && \text{objectif dual} \\
&= w
\end{aligned}
$$

On a $z = w$ ssi les deux inégalités deviennent des égalités :

- la $j$ème contrainte du dual est atteinte ou $x_j = 0$;
- la $i$ème contrainte du primal est atteinte ou $y_i = 0$;

Théorème (Ecarts complémentaires version II)

Une solution $x_1, \ldots, x_n$ du primal est optimale si et seulement si il existe des nombres $y_1^*, \ldots, y_m^*$ tels que :

- *$y_1^*, \ldots, y_m^*$ forment une solution du dual ;*
- *si $x_j^* > 0$ alors la jème contrainte du dual est atteinte $(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j)$;*
- *si la ième contrainte du primal n'est pas atteinte $(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* < b_i)$ alors $y_i^* = 0$.*

Application : si l'on nous propose une solution du primal, pour vérifier son optimalité il suffit de résoudre le système d'équations (de variables y_i^*) qui en découle.

Interprétation économique de la dualité

Primal	Dual
max $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	min $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
contr : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $x_j \ge 0$	contr : $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$, $y_i \ge 0$

pour tout $i = 1, \ldots, m$ et tout $j = 1, \ldots, n$.

z : profit (en euros).
x_j : quantité du produit j.
b_i : quantité de la ressource i.
c_j : euros/unité du produit j.
a_{ij} : unités de ressource i / unité de produit j.
y_i : euros/unité de ressource i.

y_i^* : profit obtenu par une unité supplémentaire de ressource i.

Théorème

Pour des valeurs t_i suffisament faibles, le programme linéaire

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\textit{contr.} : & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + t_i & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \ge 0 & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

a une solution optimale de valeur

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i$$

où z^* est la valeur optimale du PL initial et $y_1^*, \ldots, y_m^*$ est une solution optimale de son dual.