Programmation linéaire

DIDIER MAQUIN

Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique
Institut National Polytechnique de Lorraine

Mathématiques discrètes – cours de 2ème année

Programmation linéaire

- Problèmes d'optimisation sous contraintes (cas particulier)
- Fonction objectif et contraintes linéaires (par rapport aux variables inconnues).
- Formulation générale :

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & M = c^T x \\ \text{sous les contraintes} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec $x \in^n, A \in^{m \times n}$, $b \in^m$ et $m < n$.

- On recherchera indifféremment à maximiser ou à minimiser

Exemple 1 – Problème de transport

On désire acheminer des marchandises de n dépôts à m points de vente

On connaît :

- c_{ij}, $i = 1..n$ et $j = 1..m$, coût de transport (i, j),
- X_i, $i = 1..n$, stocks des dépôts,
- D_j, $j = 1..m$, niveaux de demande aux points de vente.

On recherche, pour chaque couple (i, j), la quantité (positive) x_{ij} à transporter du dépôt X_i au point de vente D_j.

Exemple 1 – Problème de transport

Solution du problème de programmation linéaire:

$$\min_{x_{ij} \geq 0} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sous les contraintes} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = X_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

Le critère représente le coût total de transport. Les contraintes expriment l'égalité de l'offre et de la demande pour chaque point de vente et chaque dépôt.

Exemple 2 – Pb de la ration alimentaire

On désire nourrir au moindre coût une collectivité tout en assurant une fourniture minimale de vitamines, sels minéraux, protéïnes, glucides, etc.

On connaît :

- A_i vecteur de composition du produit i,
- c_i coût pour 100 grammes (par exemple) de l'aliment i,
- b vecteur des quantités minimales requises pour le consommateur.

Exemple 2 – Pb de la ration alimentaire

Le problème à résoudre, si l'on dispose de n aliments de base est :

$$\begin{aligned} \min_{x_i} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} \quad & \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \geq b \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Problème de programmation linéaire tout à fait classique. Intervient fréquemment en agriculture (rations pour animaux) ou dans l'industrie (mélanges de produits pétroliers ayant des caractéristiques minimales – volatilité, indices d'octanes, etc –).

Simplexe – Exemple

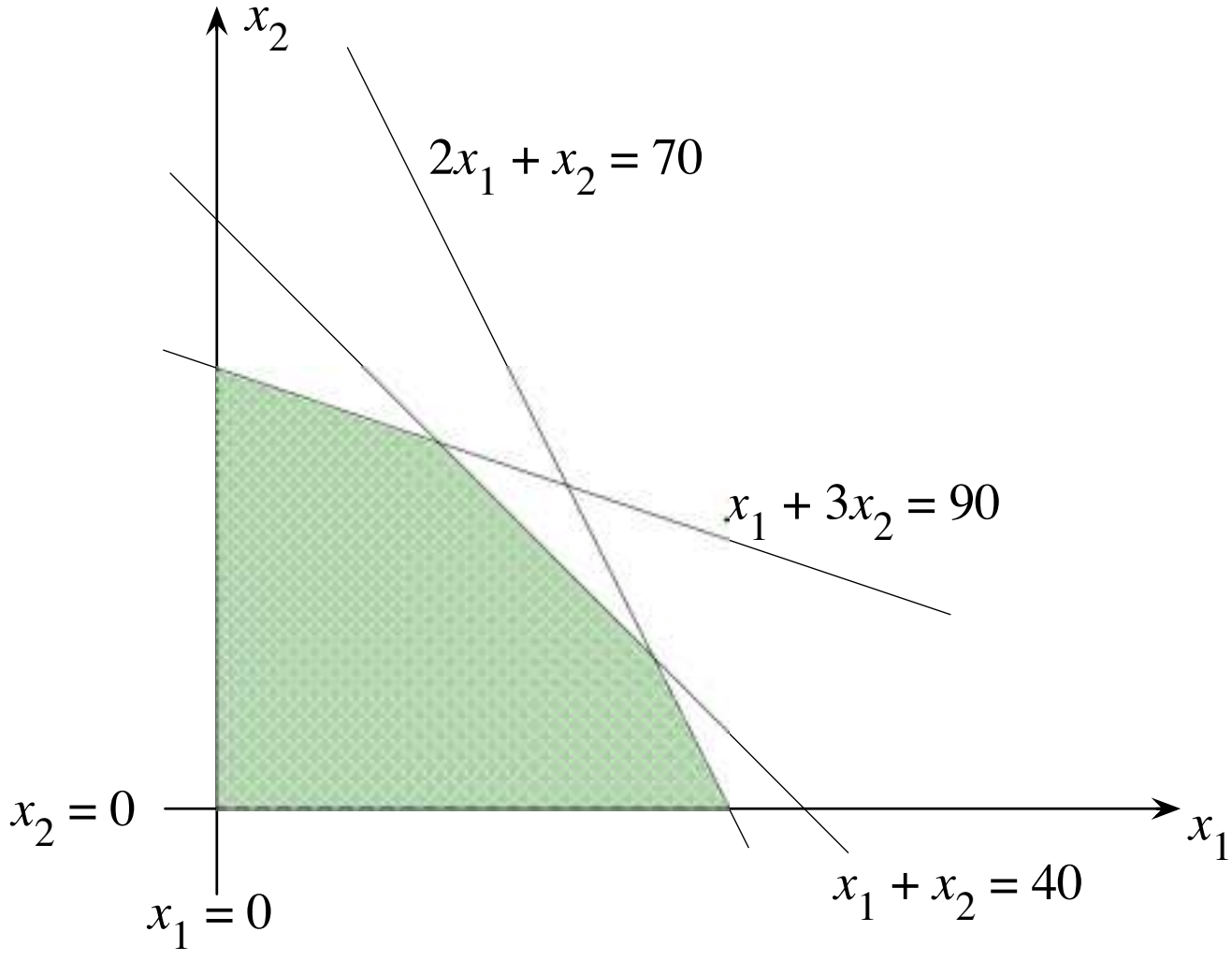
Considérons le problème suivant :

$$\max_x M = 40x_1 + 60x_2 \tag{1a}$$

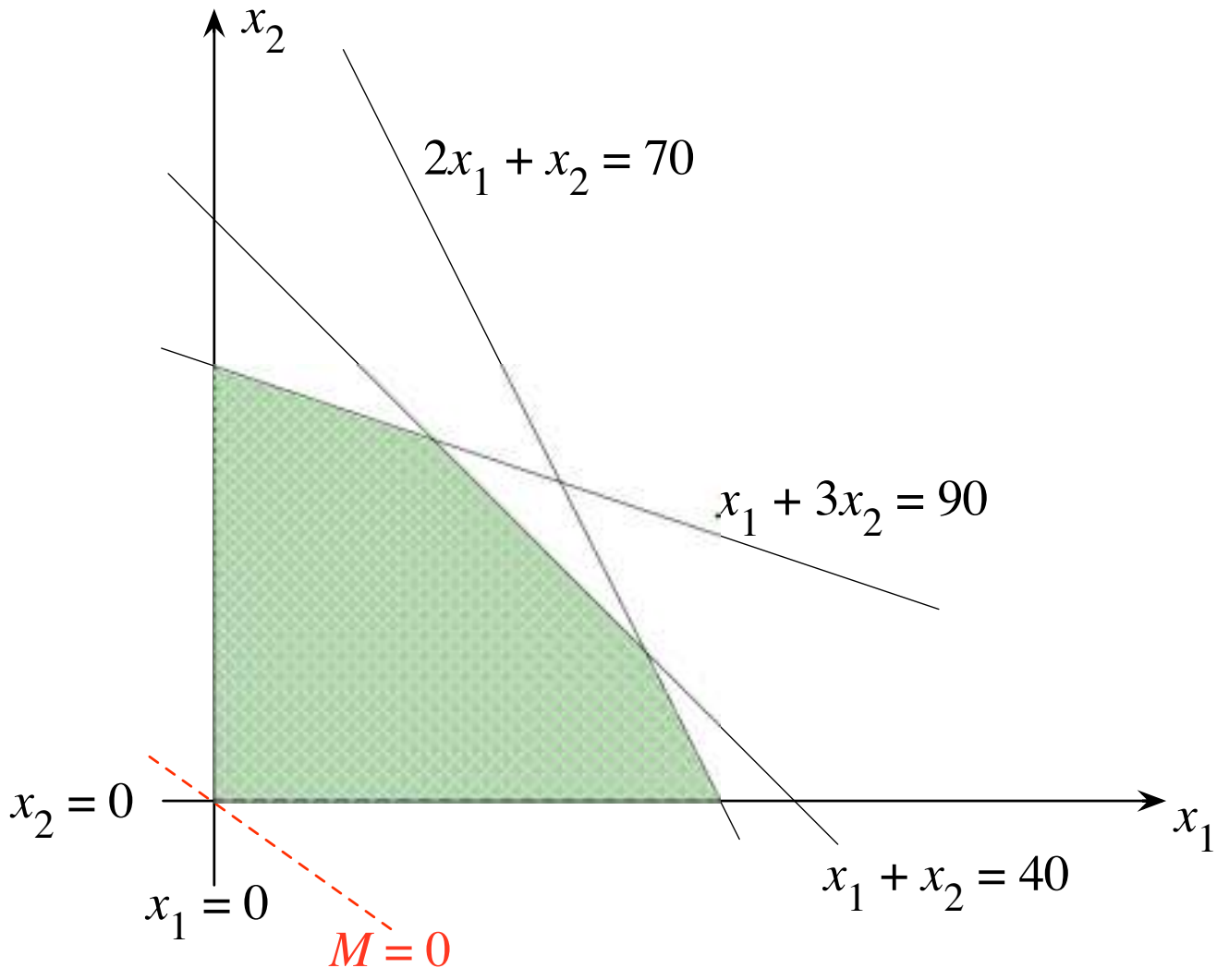
$$\begin{aligned} \text{sous les contraintes} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{1b}$$

Première approche : résolution graphique.

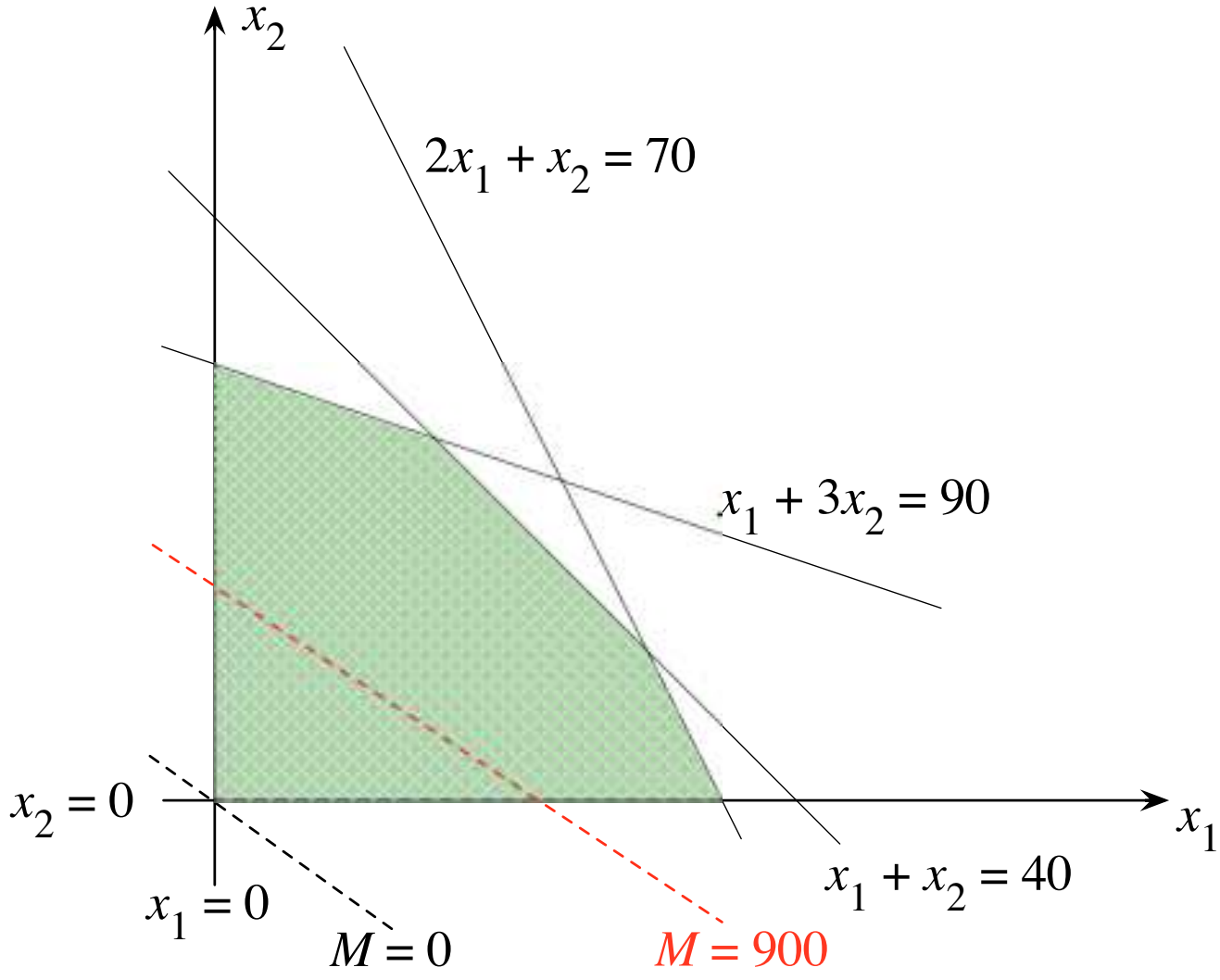
Résolution graphique



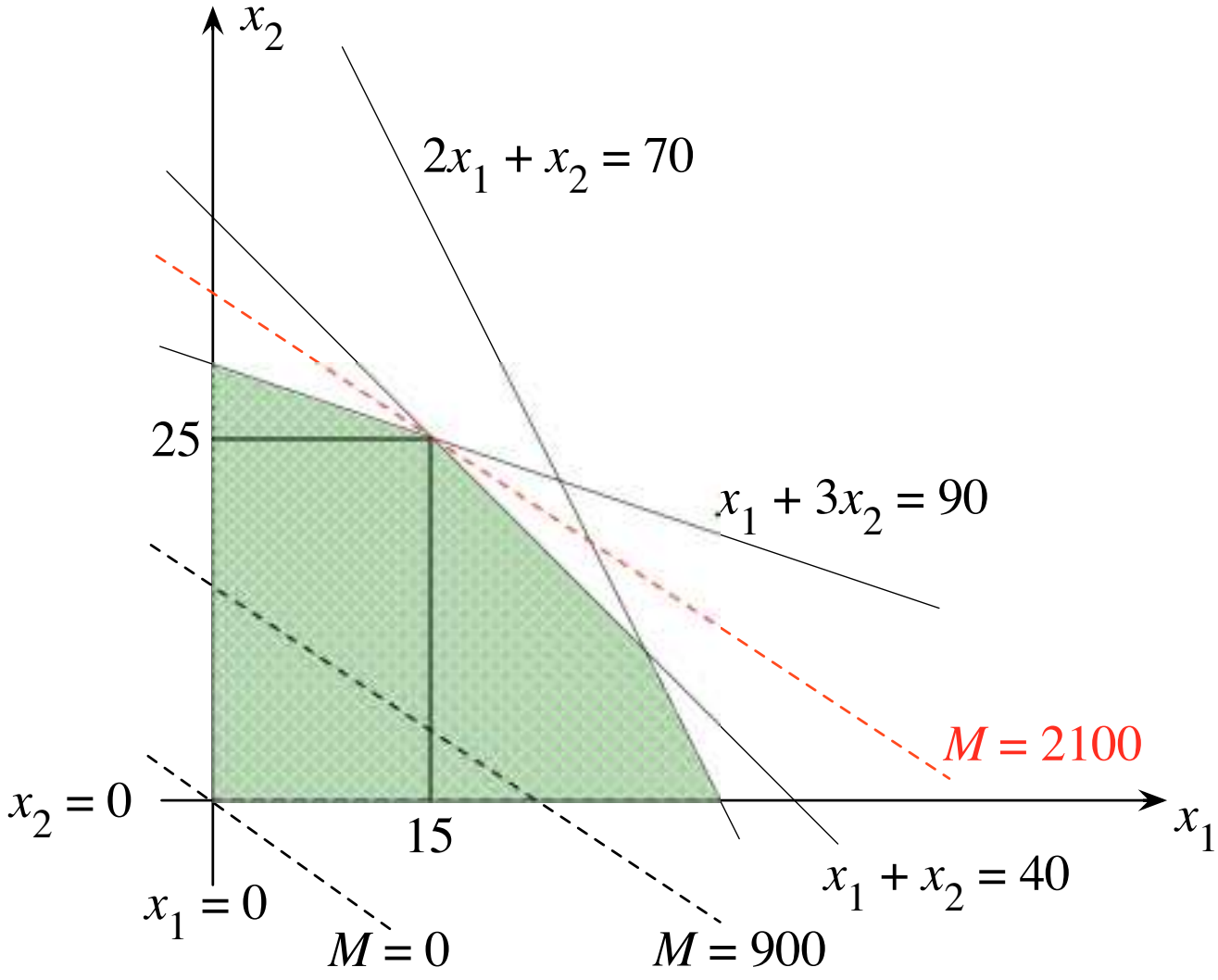
Résolution graphique



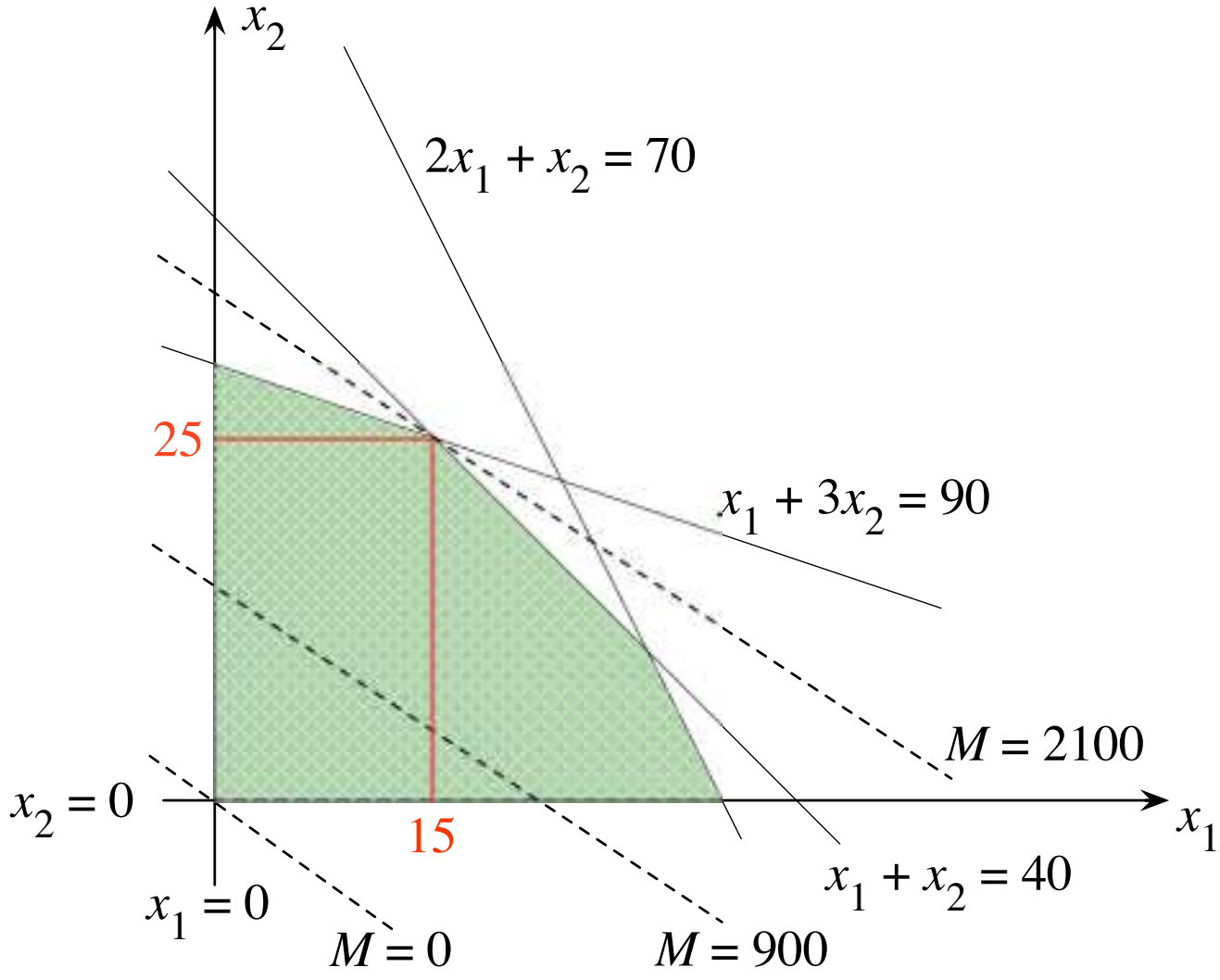
Résolution graphique



Résolution graphique



Résolution graphique



Méthode systématique – Simplexe

- Nécessité d'une méthode systématique – Méthode du simplexe
- Première idée : transformation des contraintes inégalité en contraintes égalité
- Introduction de variables d'écart

Introduisons donc les variables x_3, x_4 et x_5 pour obtenir les égalités :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 70 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 &= 90 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

Méthode systématique – Simplexe

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 70 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 &= 90 \end{aligned}$$

- Système de trois équations à cinq inconnues,
- Equations indépendantes ; rang de la matrice du système égal à 3,
- Si l'on impose arbitrairement la valeur de deux des variables, les trois variables restantes peuvent être déduites.
- Solution de base : $x_1 = x_2 = 0$

$$x_3 = 70, \qquad x_4 = 40 \qquad x_5 = 90$$

Méthode systématique – Simplexe

- Valeur du critère $M = 40x_1 + 60x_2$ nulle,
- Pour augmenter M, il faut augmenter x_1 ou x_2,
- On choisit x_2 (meilleure sensibilité) en conservant $x_1 = 0$.

$$\begin{array}{rcrcl} x_3 & = & 70 - & x_2 & \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 70 \\ x_4 & = & 40 - & x_2 & \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 40 \\ x_5 & = & 90 - 3x_2 & & \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 30 \end{array}$$

- Valeur maximale admissible $x_2 = 30$.
- Nouvelle solution admissible :

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 30, \qquad x_3 = 40, \qquad x_4 = 10 \qquad x_5 = 0$$

- Nouvelles variables de base x_2, x_3 et x_4.

Méthode systématique – Simplexe

- Nouvelle valeur du critère $M = 40x_1 + 60x_2 = 1800$,
- Une et une seule variable de base, x_3, x_4 ou x_5, intervient dans chaque équation,
- Chaque nouvelle variable de base x_2, x_3 et x_4 ne doit intervenir que dans une seule équation.
- Il suffit d'extraire la valeur de x_2 de la troisième équation et de substituer son expression dans les deux premières.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5/3\ x_1 & & + x_3 & & - 1/3\ x_5 & = & 40 \\ 2/3\ x_1 & & & + x_4 & - 1/3\ x_5 & = & 10 \\ 1/3\ x_1 & + x_2 & & & + 1/3\ x_5 & = & 30 \end{array}$$

Méthode systématique – Simplexe

- Nouvelle valeur du critère $M = 1800 + 20x_1 - 20x_5$,
- On choisit d'augmenter x_1 en conservant $x_5 = 0$

$$\begin{array}{lcll} x_3 & = & 40 - 5/3\ x_1 \geq 0 & \Rightarrow \quad x_1 \leq 24 \\ x_4 & = & 10 - 2/3\ x_1 \geq 0 & \Rightarrow \quad x_1 \leq 15 \\ x_5 & = & 30 - 1/3\ x_1 \geq 0 & \Rightarrow \quad x_1 \leq 90 \end{array}$$

- Valeur maximale admissible $x_1 = 15$.
- Nouvelle solution admissible :

$$x_1 = 15, \qquad x_2 = 25, \qquad x_3 = 15, \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = 0$$

- Nouvelles variables de base x_1, x_2 et x_3.

Méthode systématique – Simplexe

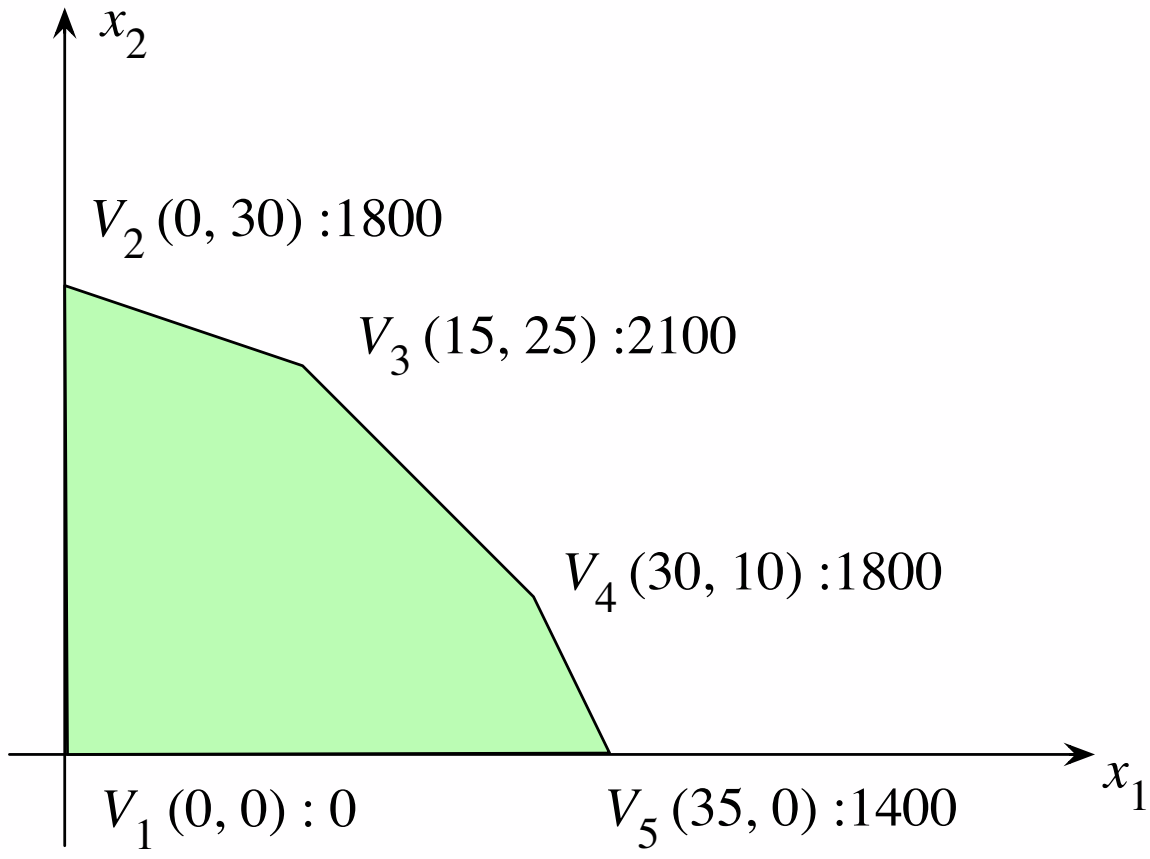
- Nouvelle valeur du critère $M = 2100 - 30x_4 - 10x_5$,
- La seule manière de modifier x_4 et x_5 consiste à les rendre positives
- $\Rightarrow$ Diminution de la valeur du critère M,
- Il n'existe donc plus d'amélioration possible et la dernière solution obtenue est la solution optimale,
- La valeur du critère est alors égale à 2100,
- Même résultat que la solution graphique (!)

Interprétation géométrique

- La solution optimale (x_1^*, x_2^*) ne peut pas être strictement à l'intérieur du polytope des contraintes,
- Au moins une des inégalités est saturée (satisfaite en tant qu'égalité),
- Sinon, on pourrait ajouter un petit multiple positif de la paire de coefficient définissant le critère (40, 60) à la solution (x_1^*, x_2^*),
- Nouvelle solution $(x_1^* + 40\varepsilon, x_2^* + 60\varepsilon)$ conduisant à une valeur de critère $M = 40(x_1^* + \varepsilon) + 60(x_2^* + \varepsilon)$ supérieure à la valeur $M^* = 40x_1^* + 60x_2^*$ supposée initialement optimale ce qui conduit à une contradiction.

Interprétation géométrique

- La solution optimale (x_1^*, x_2^*) doit se trouver sur la frontière du polytope des contraintes,



Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 90 \\
\hline
1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 90 \\
\hline
1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70/1 = 70 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40/1 = 40 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 90/3 = 30 \\
\hline
1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\hline
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \\
\hline
1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\hline
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 40 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \\
\hline
1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	$5/3$	0	1	0	$-1/3$	40
0	1	1	0	1	0	40
0	$1/3$	1	0	0	$1/3$	30
1	-40	-60	0	0	0	0

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	$5/3$	0	1	0	$-1/3$	40
0	$2/3$	0	0	1	$-1/3$	10
0	$1/3$	1	0	0	$1/3$	30
1	-40	-60	0	0	0	0

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 40 \\
0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 10 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \\
\hline
1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 40 \\
0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 10 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \\
\hline
1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 1800
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 40 \\
0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 10 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \\
\hline
1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 1800
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 40 \times 3/5 = 24 \\
0 & 2/3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 10 \times 3/2 = 15 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \times 3/1 = 90 \\
\hline
1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 1800
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 40 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 15 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \\
\hline
1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 1800
\end{array}
$$

Opérations matricielles

- Critère et contraintes

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\hline
0 & 5/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 40 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 15 \\
0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 30 \\
\hline
1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 & 1800
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
M & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1/2 & 15 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 15 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 25 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 2100
\end{array}
$$

Position du problème général

- Problème général :

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & M = c^T x \\ \text{sous les contraintes} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Introduction de variables d'écart, $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$

$$\max_{x_e} \quad M = c_e^T x_e + u \tag{2a}$$

$$\begin{aligned} \text{sous les contraintes} \quad & A_e x_e = b \\ & x_e \geq 0 \end{aligned} \tag{2b}$$

Définitions

- Tout vecteur x_e satisfaisant les contraintes égalité est appelé vecteur admissible,
- Un vecteur admissible qui maximise le critère est appelé vecteur admissible optimal.
- L'ensemble $X_{ad} = \{x_e | A_e x_e = b, x_e \geq 0\}$ est l'ensemble des solutions admissibles du problème.

Définitions polytopes convexes

- Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe ssi :

$$\forall x \in S, y \in S, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S$$

  Le demi-espace fermé des $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérifiant :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \leq \beta$$

  est un ensemble convexe.
- L'intersection d'un nombre fini de sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe.
- Un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.
- Un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ est un polytope borné.

Définitions polytopes convexes

- L'ensemble S des solutions admissibles d'un problème de programmation linéaire est soit
  - un polytope convexe (cas des domaines non bornés),
  - soit un polyèdre convexe (cas des domaines bornés),
- Etant donnés k points $x^1, x^2, \ldots, x^k$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle combinaison linéaire convexe de ces k points, un point x tel que:

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k$$

avec $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, k$ et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$,

Définitions polytopes convexes

- On appelle points extrêmes d'un polytope ou d'un polyèdre convexe S, un point $x \in S$ qui ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire convexe d'autres points $y \in S$ $(y \neq x)$. Ces points correspondent aux sommets du polytope.
- Tout point x d'un polyèdre convexe $S \subset \mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire convexe de points extrêmes de S.

Définitions

- Un problème de programmation linéaire à m contraintes et n variables est dit non-dégénéré si toute sous-matrice de dimension $m \times m$ extraite de la matrice augmentée $[A_e,\ b]$ de dimension $m \times (q+1)$ est non-singulière,
- Si tel n'est pas le cas, le problème est dit dégénéré.
- Les variables associées aux colonnes de la matrice B, matrice non-singulière de dimension $m \times m$ extraite de A_e sont appelées variables de base. Les autres variables sont dites hors base,
- Une solution dans laquelle les variables hors base sont toutes nulles est appelée solution de base.

Méthode du simplexe

- On écrit A_e sous la forme $A_e = [B,\ N]$ où N désigne les colonnes de A_e qui ne sont pas dans B,
- On partitionne les vecteurs x_e en $[x_B,\ x_N]$ et c_e^T en $[c_B^T,\ c_N^T]$,
- Toute solution du problème vérifie $A_e x_e = b$, c-à-d :

$$Bx_B + Nx_N = b$$

- La solution de base associée à la base B est la solution particulière obtenue en posant $x_N = 0$. Le vecteur x_B est alors déterminé de façon unique par la résolution du système de Cramer :

$$Bx_B = b, \qquad \text{soit} \qquad x_b = B^{-1}b$$

Méthode du simplexe

- On ne modifie le système linéaire des contraintes $A_e x_e = b$ en le multipliant par une matrice régulière K. La solution précédente a été obtenue en choisissant $K = B^{-1}$. On a en effet

$$A_e x_e = b \quad \Leftrightarrow \quad B x_B + N x_N = b$$
$$A_e x_e = b \quad \Leftrightarrow \quad x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

- Critère initial :

$$M = c_e^T x_e = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$$M = c_B^T B^{-1} b + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1} N \right) x_N$$

$$M = M(x) + \overline{c}_N^T x_N$$

Méthode du simplexe

- Critère initial :

$$M = M(x) + \overline{c}_N^T x_N$$

- Une condition nécessaire et suffisante pour que B soit une base admissible optimale (au sens où la solution de base associée est admissible et optimale) est que le vecteur des coûts réduits des variables hors base soit négatif ou nul ; $\overline{c}_N \leq 0$.
- En effet, dans ce cas, comme $x_N \geq 0$, le terme $\overline{c}_N^T x_N$ est nécessairement négatif ou nul. Comme l'on cherche à maximiser la valeur du critère, cela signifie que l'on a atteint l'optimum et qu'il est égal à $M(x)$.

Méthode du simplexe

- On considère une base quelconque B^i et x^i la solution correspondante,
- S'il existe une variable hors base x_s telle que la composante de rang s du vecteur de coûts réduits $\overline{c}_N$ que l'on notera $\overline{c}_N(s)$ est positive, alors

  a) on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_s sans sortir de l'ensemble des solutions admissibles et, dans ce cas, l'optimum du critère est non borné,

  b) il existe une autre base B^{i+1} et une autre solution de base x^{i+1} telle que l'on ait $M(x^{i+1}) > M(x^i)$

Méthode du simplexe

- On part de la solution $x^i = \left[x^i_B,\ x^i_N\right] = \left[B^{-1}b,\ 0\right]$
- On envisage un déplacement dans lequel la variable x_s est la seule parmi les variables hors base à changer de valeur : nulle dans la solution x^i, elle va prendre une valeur $x_s = \theta > 0$.
- La nouvelle solution $x = [x_B,\ x_N]$ obtenue vérifiera :

$$x_N = \theta e_s$$

où e_s est un vecteur de la dimension de x_N avec toutes ses composantes nulles sauf la composante de rang s égale à 1.

Méthode du simplexe

- La valeur de θ doit être choisie de telle sorte que $x = [x_B,\ x_N]$ reste une solution admissible, c'est-à-dire :

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0$$

avec :

$$x_N = \theta e_s$$

d'où :

$$x_B = \overline{b} - \theta \overline{N}_s \geq 0$$

- En regroupant les contraintes, on a :

$$\begin{cases} x_N &= \theta e_s \\ x_B &= \overline{b} - \theta \overline{N}_s \end{cases}$$

Méthode du simplexe

- Contraintes :

$$\begin{cases} x_N &= \theta e_s \\ x_B &= \overline{b} - \theta \overline{N}_s \end{cases}$$

- Deux cas peuvent alors se présenter :

Cas 1 : $\overline{N}_s \leq 0$

La valeur de θ peut être aussi grande que l'on veut, on aura toujours $x_B \geq 0$ et l'optimum du critère est non borné

Méthode du simplexe

- Contraintes :

$$\begin{cases} x_N &= \theta e_s \\ x_B &= \overline{b} - \theta \overline{N}_s \end{cases}$$

- Deux cas peuvent alors se présenter :

Cas 2 : $\exists i (1 \leq i \leq m) \mid \overline{N}_s(i) > 0$

La valeur de θ ne peut être augmentée indéfiniment ; la plus grande valeur $\hat{\theta}$ de θ est définie par :

$$\hat{\theta} = \min_{i, \overline{N}_s(i) > 0} \left\{ \frac{\overline{b}(i)}{\overline{N}_s(i)} \right\} = \frac{\overline{b}(r)}{\overline{N}_s(r)}$$

et l'on a $M(x^{i+1}) = M(x^i) + \hat{\theta}\, \overline{c}_N(s) > M(x^i)$.

Méthode du simplexe

- Si le problème est non dégénéré, on remarque que cette solution a exactement m composantes non nulles.
  - la variable x_s, nulle dans x^i, est devenue strictement positive,
  - la variable x_r, strictement positive dans x^i a maintenant pour valeur :

$$x_r = \overline{b}(r) - \hat{\theta}\ \overline{N}_s(r) = 0$$

- La solution $x^{i+1} = \left[x_B^{i+1},\ x_N^{i+1}\right]$ est une solution de base. Elle correspond à la base B^{i+1} déduite de B^i en remplaçant la colonne r par la colonne s (bases B^i et B^{i+1} adjacentes.

Problème de l'artisan chocolatier

- Un artisan chocolatier décide de confectionner des œufs en chocolat.
- En réserves, il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 l de lait.
- Il a deux spécialités : l'œuf Extra et l'œuf Sublime.
- Un œuf Extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 l de lait.
- Un œuf Sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 l de lait.
- Il fera un profi t de 20 Euros en vendant un oeuf Extra, et de 30 Euros en vendant un œuf Sublime.

- Combien d'œufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfi ce possible ?

Problème de l'artisan chocolatier

- Notons x_1 le nombre d'œufs Extra et x_2 le nombre d'œufs Sublime à produire. Le chocolatier cherche à maximiser la fonction objectif :

$$\max z = 20x_1 + 30x_2$$

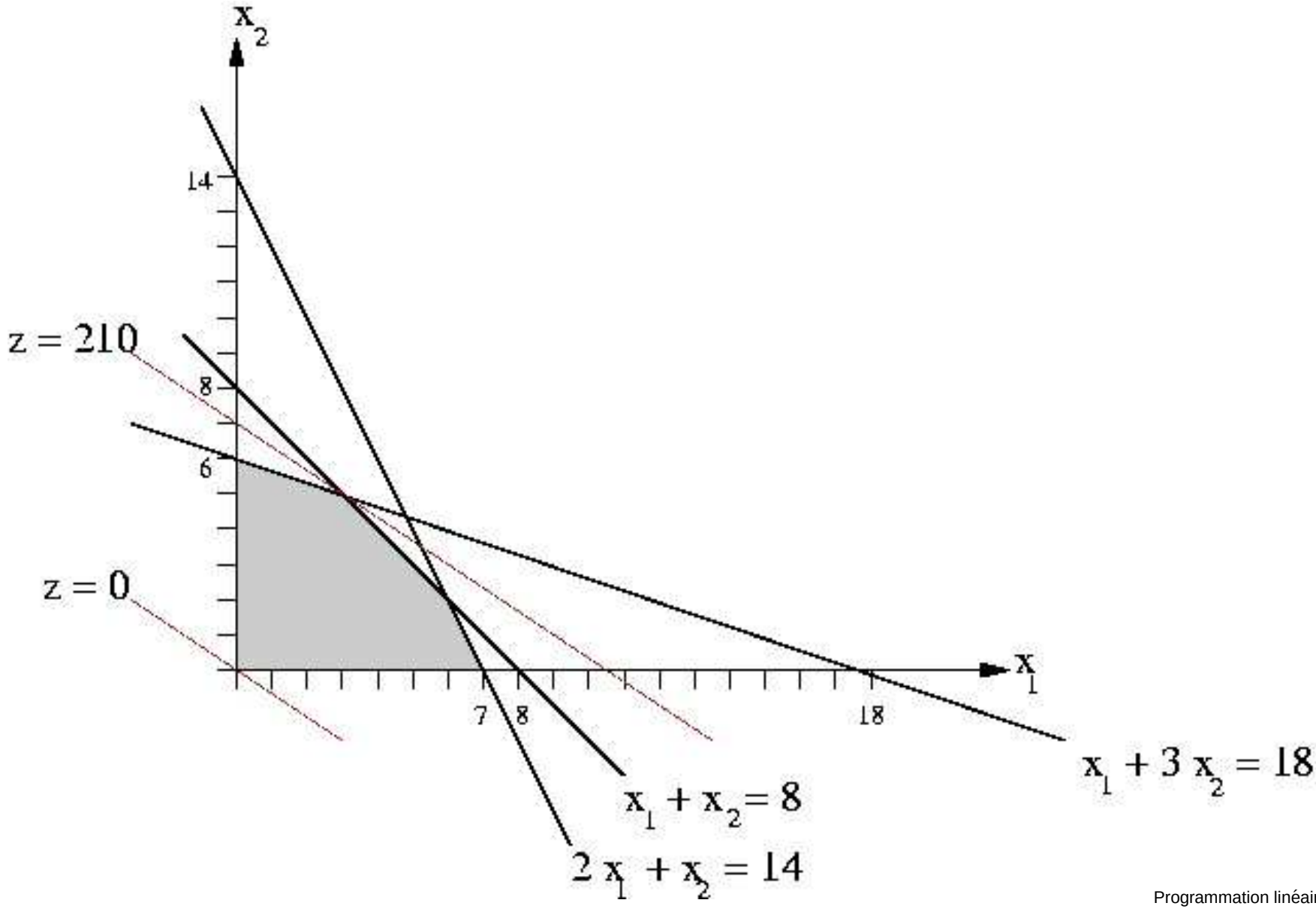
- Étant données les réserves du chocolatier, les contraintes suivantes devront être satisfaites

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 14 \end{aligned}$$

- On a, de plus, les deux contraintes

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Problème de l'artisan chocolatier



Problème de l'artisan chocolatier