Programmation linéaire

NICOD JEAN-MARC

Master 2 Informatique
Université de Franche-Comté
UFR des Sciences et Techniques

septembre 2008

Sommaire

Introduction

Ce chapitre a pour but de rappeler comment résoudre un problème d'optimisation avec *maximisation* ou *minimisation* d'une fonction objectif fidèlement à un certain nombre de contraintes.

Écriture du problème sous la forme :

- d'inéquations
- d'un objectif à optimiser

➨ C'est cet ensemble qui porte le nom de programme linéaire

Sommaire

Exemple : une campagne électorale

Objectif : remporter les élections régionales à moindre frais. La zone du scrutin regroupe :

1. le centre ville : 100 000 inscrits
2. la banlieue : 200 000 inscrits
3. la campagne : 50 000 inscrits

Les frais de la campagne électorale

Il est possible d'influencer grâce à la publicité sur les thèmes suivants :

- construction de routes (1) ;
- lutte anti-drogue (2) ;
- subvention aux agriculteurs (3) ;
- taxes sur les engrais pour améliorer l'eau (4).

Influence de la publicité dans les votes

Nombre de voies gagnées/perdues par 1 000€ dépensés en publicité.

thèmes	**ville**	**banlieue**	**campagne**
les routes	-2 000	+5 000	+3 000
la drogue	+8 000	+2 000	-5 000
subventions	0	0	+10 000
taxes pour l'eau	10 000	0	-2 000

Le problème à résoudre

Le problème est donc de connaître la somme minimale à investir en communication pour que le nombre de voies en faveur du candidat soit de :

- 50 000 en ville ;
- 100 000 en banlieue ;
- 25 000 à la campagne.

➧ Comment résoudre ce problème : des essais/erreurs, le hasard, ... ?

Définitions

- 20 000 € pour le thème (1) ;
- 0 € pour le thème (2) ;
- 4 000 € pour le thème (3) ;
- 9 000 € pour le thème (4) ;

➡

- 50 000 votes en ville ;
- 100 000 votes en banlieue ;
- 82 000 votes à la campagne.

➡ 33 000 € en communication.

Définitions

- 20 000 € pour le thème (1) ;
- 0 € pour le thème (2) ;
- 4 000 € pour le thème (3) ;
- 9 000 € pour le thème (4) ;

➨

- 50 000 votes en ville ;
- 100 000 votes en banlieue ;
- 82 000 votes à la campagne.

➨ 33 000 € en communication.

Une meilleure solution existe-t-elle ?

Formulation mathématique

Posons le problème sous forme mathématiques :

- soit x_1 la somme dépensée en communication pour le thème (1) ;
- soit x_2 la somme dépensée en communication pour le thème (2) ;
- soit x_3 la somme dépensée en communication pour le thème (3) ;
- soit x_4 la somme dépensée en communication pour le thème (4) ;

Formulation mathématique

Posons le problème sous forme mathématiques :

- soit x_1 la somme dépensée en communication pour le thème (1) ;
- soit x_2 la somme dépensée en communication pour le thème (2) ;
- soit x_3 la somme dépensée en communication pour le thème (3) ;
- soit x_4 la somme dépensée en communication pour le thème (4) ;

D'où les contraintes du problème pour les 3 secteurs :

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{en ville} & -2x_1 & + & 8x_2 & + & 0x_3 & + & 10x_4 & \geq & 50 \\
\text{en banlieue} & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & \geq & 100 \\
\text{à la campagne} & 3x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & \geq & 25
\end{array}\right.$$

La fonction à minimiser est $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ avec $x_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4.

Formulation mathématique

Posons le problème sous forme mathématiques :

- soit x_1 la somme dépensée en communication pour le thème (1) ;
- soit x_2 la somme dépensée en communication pour le thème (2) ;
- soit x_3 la somme dépensée en communication pour le thème (3) ;
- soit x_4 la somme dépensée en communication pour le thème (4) ;

D'où les contraintes du problème pour les 3 secteurs :

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{en ville} & -2x_1 & + & 8x_2 & + & 0x_3 & + & 10x_4 & \geq & 50 \\
\text{en banlieue} & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & \geq & 100 \\
\text{à la campagne} & 3x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & \geq & 25
\end{array}\right.$$

La fonction à minimiser est $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ avec $x_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4.

➨ L'ensemble de ces équations forment un programme linéaire.

Formulation générale

Soit la fonction linéaire $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$
Une équation linéaire s'exprime sous la forme
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$
Une inégalité linéaire : $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \ b$ ou $\ \geq \ b$ (inégalité au sens large en programmation linéaire).
Le problème de programmation linéaire est la *maximisation/minimisation* d'une fonction linéaire. La résolution de ce problème se fait par la méthode du *simplexe*.

Sommaire

Résolution d'un programme linéaire

Plusieurs manières d'exprimer un programme linéaire :

- la *forme canonique* ($\leq$)
- la *forme standard* ($=$)

➨ Optimisation d'une fonction objectif linéaire

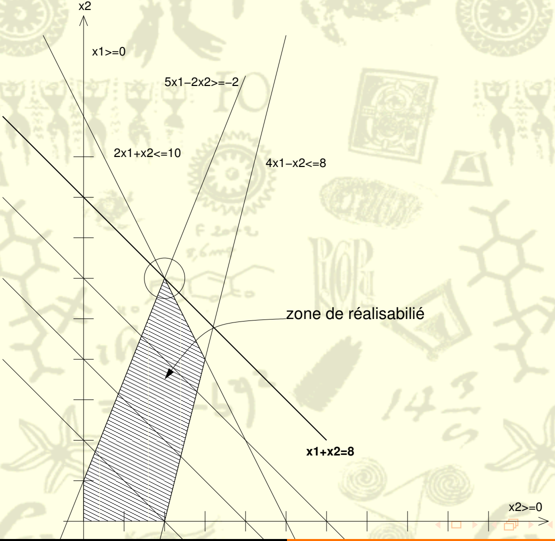
Exemple

Soit le programme linéaire à 2 variables suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & x_1 + x_2 \\ \text{avec les contraintes} & 4x_1 - x_2 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 5x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ \text{et} & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

➡ Résolution graphique en 2D en partitionnant l'espace à chaque contrainte pour la définition d'une zone *réalisable*.

Résolution graphique



Généralisation

- Même démarche pour un programme linéaire avec un plus grand nombre de variables
- Définition de la zone réalisable (simplexe) par l'intersection des demi-espaces donnés par les contraintes
- Solution : intersection entre l'hyperplan mobile de la fonction objectif et le simplexe (un des sommets de la zone réalisable toujours convexe).

Applications

La programmation linéaire est utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation comme :

- la planification de l'affectation des personnels sur les vols des compagnies aériennes ;
- la maximisation du pétrole extrait en fonction du nombre de puits de forages ;
- la résolution du problème de graphes et de combinatoires des flots ;
- le calcul d'un ordonnancement de tâches sur des machines en régime permanent ;
- ...

Résolution algorithmique

- Algorithmique du simplexe (très bonne perf même si exp dans le pire cas)
- Algorithme de *l'ellipsoïde* (linéaire mais très lent en pratique)
- Solutions en nombre entiers : problème *NP*-Complet

Sommaire

Forme canonique et forme standard

- Différente manière décrire un programme linéaire :
  - forme canonique
  - forme standard (algo du simplexe)

Forme canonique

Le programme linéaire écrit avec la forme canonique ($n+m$ inégalités avec n variables et m contraintes :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ (fonction objectif)} \\ \text{avec les contraintes} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ avec } i = 1, \ldots, m \\ \text{et les contraintes de positivité} & x_j \geq 0 \text{ avec } j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Exemple de conversion

Soit le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lrcrcr} \text{minimiser} & -2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{avec les contraintes} & x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

1. Minimiser une fonction = maximiser la fonction opposée ($\times -1$)
2. Les contraintes de positivités :

$$x_j \rightarrow x_j' - x_j'' \text{ avec } x_j' \geq 0 \text{ et } x_j'' \geq 0$$

3. Transformation des égalités en deux contraintes :

$$x_1 + x_2' - x_2'' = 7 : \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2' - x_2'' \leq 7 \\ -x_1 - x_2' + x_2'' \leq -7 \end{array}\right.$$

Exemple de conversion

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & -2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{avec les contraintes} & x_1 + x_2 & = & 7 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & \geq & 0 \end{cases}$$

1. Minimiser une fonction = maximiser la fonction opposée $(\times -1)$
2. Les contraintes de positivités :

$$x_j \rightarrow x'_j - x''_j \text{ avec } x'_j \geq 0 \text{ et } x''_j \geq 0$$

3. Transformation des égalités en deux contraintes :

$$x_1 + x'_2 - x''_2 = 7 : \begin{cases} x_1 + x'_2 - x''_2 \leq 7 \\ -x_1 - x'_2 + x''_2 \leq -7 \end{cases}$$

Exemple de conversion

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & -2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{avec les contraintes} & x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \end{cases}$$

1. Minimiser une fonction = maximiser la fonction opposée $(\times -1)$
2. Les contraintes de positivités :

$$x_j \rightarrow x_j' - x_j'' \text{ avec } x_j' \geq 0 \text{ et } x_j'' \geq 0$$

3. Transformation des égalités en deux contraintes :

$$x_1 + x_2' - x_2'' = 7 : \begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' \leq 7 \\ -x_1 - x_2' + x_2'' \leq -7 \end{cases}$$

Exemple de conversion

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{avec les contraintes} & x_1 + x_2 = 7 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{cases}$$

1. Minimiser une fonction = maximiser la fonction opposée ($\times -1$)
2. Les contraintes de positivités :

$$x_j \rightarrow x_j' - x_j'' \text{ avec } x_j' \geq 0 \text{ et } x_j'' \geq 0$$

3. Transformation des égalités en deux contraintes :

$$x_1 + x_2' - x_2'' = 7 : \begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' \leq 7 \\ -x_1 - x_2' + x_2'' \leq -7 \end{cases}$$

Version canonique

Le programme linéaire devient le programme suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximiser} & 2x_1 & - & 3x_2' & + & 3x_2'' & & \\
\text{avec les contraintes} & x_1 & + & x_2' & - & x_2'' & = & 7 \\
 & x_1 & - & 2x_2' & + & 2x_2'' & \leq & 4 \\
\text{et} & & & & & x_1, x_2', x_2'' & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

Version canonique du programme linéaire

$$
\left\{
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximiser} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{avec les contraintes} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 7 \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & -7 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
\text{et} & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

avec $x_2' = x_2$ et $x_2'' = x_3$

Conversion en forme standard

- Forme standard utilisée par l'algorithme du simplexe
- Ajouts des variables d'écart à la valeur de la contrainte pour toutes les inéquations de la forme canonique

$$\text{Si } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

Introduction de la variable *d'écart s* :

$$s = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{ avec } s \geq 0$$

De manière générale

- Soit x_{n+i} la variable d'écart de la i-ème contrainte (si n contraintes)
- Écriture de la i-ème contrainte sous la forme de l'égalité :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{ avec } x_{n+i} \geq 0$$

Version standard (1/2)

$$
\left\{
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{maximiser} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & & & \\
\text{avec les contraintes} & x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
 & x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
 & x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \\
\text{et} & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} & \geq & 0 & &
\end{array}
\right.
$$

Version standard (2/2)

- Les variables d'écart : les *variables de base*
- Les autres : les *variables hors base*
- On pose z la valeur de l'objectif
- Exemple précédent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & & \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & -7 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & 4 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \end{array}\right.$$

N, B, A, b, c et v

On pose les notations suivantes :

- $N = \{$indices des variables *hors base*$\}$ avec $(|N| = n)$
- $B = \{$indices des variables de *base*$\}$ avec $(|B| = m)$
- A la matrice des coefficients des variables hors base
- b le vecteurs des constantes dans les égalités linéaires
- c le vecteur des variables de la fonction objectif
- v la constante de la fonction objectif

$$\begin{cases} z = v + \sum_{j \in N} c_i x_j \\ x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \text{ pour } i \in B \end{cases}$$

➨ (N, B, A, b, C, v) : la forme standard d'un programme linéaire.

Exemple de forme standart

$$\begin{cases} z &= 28 &- &\frac{x_3}{6} &- &\frac{x_5}{6} &- &\frac{2x_6}{3} \\ x_1 &= 8 &+ &\frac{x_3}{6} &+ &\frac{x_5}{6} &- &\frac{x_6}{3} \\ x_2 &= 4 &- &\frac{8x_3}{3} &- &\frac{2x_5}{3} &+ &\frac{x_6}{3} \\ x_4 &= 18 &- &\frac{x_3}{2} &+ &\frac{x_5}{2} & & \end{cases}$$

avec

$$B = \left\{1, 2, 4\right\} \quad N = \left\{3, 5, 6\right\} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad v = 28$$

Sommaire

Algorithme du simplexe

- Algorithme non polynomial dans le pire cas
- Excellentes performances en pratique
- Mode de calcul semblable à la méthode du pivot de Gauss
- Programme linéaire écrit sous la forme standard
- Très souvent, différents formats de représentation des programmes linéaires sont admis

Le principe de l'algorithme du simplexe

- *Maximiser la fonction objectif en maximisant chacune des variables hors base ayant un coefficient positif dans la fonction objectif*.
  - extraction des variables de base les unes après les autres
  - remplacement dans le reste du programme
  - si plus aucune variable n'a de coefficient positif dans la fonction objectif alors il n'est plus possible d'augmenter sa valeur
    - mise à 0 des variables de la fonction objectif à cet instant
    - calcul de la valeur des variables de hors base
- On a alors la solution du programme linéaire : valeur de la fonction objectif et valeur des variables hors base du programme initial

Le principe de l'algorithme du simplexe

- *Maximiser la fonction objectif en maximisant chacune des variables hors base ayant un coefficient positif dans la fonction objectif*.
  - extraction des variables de base les unes après les autres
  - remplacement dans le reste du programme
  - si plus aucune variable n'a de coefficient positif dans la fonction objectif alors il n'est plus possible d'augmenter sa valeur
    - mise à 0 des variables de la fonction objectif à cet instant
    - calcul de la valeur des variables de hors base
- On a alors la solution du programme linéaire : valeur de la fonction objectif et valeur des variables hors base du programme initial

Le principe de l'algorithme du simplexe

- *Maximiser la fonction objectif en maximisant chacune des variables hors base ayant un coefficient positif dans la fonction objectif*.
  - extraction des variables de base les unes après les autres
  - remplacement dans le reste du programme
  - si plus aucune variable n'a de coefficient positif dans la fonction objectif alors il n'est plus possible d'augmenter sa valeur
  - mise à 0 des variables de la fonction objectif à cet instant
  - calcul de la valeur des variables de hors base
- On a alors la solution du programme linéaire : valeur de la fonction objectif et valeur des variables hors base du programme initial

Le principe de l'algorithme du simplexe

- *Maximiser la fonction objectif en maximisant chacune des variables hors base ayant un coefficient positif dans la fonction objectif*.
    - extraction des variables de base les unes après les autres
    - remplacement dans le reste du programme
    - si plus aucune variable n'a de coefficient positif dans la fonction objectif alors il n'est plus possible d'augmenter sa valeur
  - mise à 0 des variables de la fonction objectif à cet instant
  - calcul de la valeur des variables de hors base
- On a alors la solution du programme linéaire : valeur de la fonction objectif et valeur des variables hors base du programme initial

Le principe de l'algorithme du simplexe

- *Maximiser la fonction objectif en maximisant chacune des variables hors base ayant un coefficient positif dans la fonction objectif*.
  - extraction des variables de base les unes après les autres
  - remplacement dans le reste du programme
  - si plus aucune variable n'a de coefficient positif dans la fonction objectif alors il n'est plus possible d'augmenter sa valeur
  - mise à 0 des variables de la fonction objectif à cet instant
  - calcul de la valeur des variables de hors base
- On a alors la solution du programme linéaire : valeur de la fonction objectif et valeur des variables hors base du programme initial

Le principe de l'algorithme du simplexe

- *Maximiser la fonction objectif en maximisant chacune des variables hors base ayant un coefficient positif dans la fonction objectif*.
  - extraction des variables de base les unes après les autres
  - remplacement dans le reste du programme
  - si plus aucune variable n'a de coefficient positif dans la fonction objectif alors il n'est plus possible d'augmenter sa valeur
  - mise à 0 des variables de la fonction objectif à cet instant
  - calcul de la valeur des variables de hors base
- On a alors la solution du programme linéaire : valeur de la fonction objectif et valeur des variables hors base du programme initial

Exemple d'exécution (1/2)

Soit le programme canonique suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcccccccc}
\text{maximiser} & & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\
\text{avec les contraintes} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 24 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 36 \\
\text{et} & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

Exemple d'exécution (2/2)

Soit sa forme standard :

$$\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Ce système de contraintes a 3 équations et 6 inconnues. Il y a par conséquent un nombre infini de solution *réalisables*. Il s'agit pour nous de trouver celle qui maximise la fonction objectif.

Solution de base

- Les solutions de base :
  - mise à 0 des variables à droite du signe "=" (variable hors base)
  - les variables de base sont donc des constantes des équations linéaires
  - dans l'exemple : les solutions de base sont les suivantes :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}) = (0, 0, 0, 30, 24, 36)$$

- La valeur de l'objectif est $z = 0$ et $\overline{x_i} = b_i \; \forall i \in B$. La solution de base n'est pas toujours une solution réalisable. Ceci ne remet pas en question la résolution du programme linéaire par l'algorithme du simplexe.

Réécriture de l'ensemble des équations et la fonction objectif

- Recherche d'un ensemble de variables de base différent de celui de la solution de base sans changer le programme linéaire initial :
  - réécriture dans une autre forme
  - itération sur cette transformation tant que cela est possible (amélioration de la fonction objectif)

Réécriture du programme linéaire

- Choix d'une variable *hors base* x_e ayant un coefficient positif dans la fonction objectif
- Donner à cette variable x_e la plus grande valeur possible sans qu'aucune contrainte ne soit violée
  - Soit l l'équation du programme linéaire la plus restrictive pour x_e
  - Expression de x_e en fonction de la variable x_l, des autres variables hors base et de la constante
  - x_e devient alors une variable de base
  - x_l devient une variable hors base.
- remplacement de x_e par l'expression trouvée au niveau de l'équation l du programme linéaire et dans la fonction objectif

Exemple (itération 1)

Choix de la variable x_1

- les autres variables hors base reste à zéro
- on augmente la valeur de x_1 le plus possible, tout en conservant des valeurs positives pour les variables de base
- on ne garde que l'équation imposant la contrainte la plus stricte

$$\begin{array}{lcl} x_1 > 30 & : & x_4 < 0 \\ x_1 > 12 & : & x_5 < 0 \\ x_1 > 9 & : & x_6 < 0 \text{ contrainte la plus stricte} \end{array}$$

➨ permutation des rôles entre x_1 et x_6 :

- x_1 devient une variable de base
- x_6 devient une variable hors base

Itération 1 (suite)

Expression de x_1 en fonction des autres variables dans l'équation 6 :

$$x_1 = 9 - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_6}{4}$$

- Réécriture de la première équation :

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$x_4 = 30 - (9 - \tfrac{x_2}{4} - \tfrac{x_3}{2} - \tfrac{x_6}{4}) - x_2 - 3x_3$$
$$x_4 = 21 - \tfrac{3x_2}{4} - \tfrac{5x_3}{2} - \tfrac{x_6}{4}$$

Itération 1 (suite)

Réécriture des autres équations et de la fonction objectif :

$$\begin{cases} z = 27 + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{3x_6}{4} \\ x_1 = 9 - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_6}{4} \\ x_4 = 21 - \frac{3x_2}{4} - \frac{5x_3}{2} - \frac{x_6}{4} \\ x_5 = 6 - \frac{3x_2}{2} - 4x_3 + \frac{x_6}{2} \end{cases}$$

➡ Opération de *pivot* avec x_1 une variable *entrante* et x_6 une variable *sortante*

On cherche alors la valeur de la solution de base en annulant toutes les variables hors base :

- On obtient une valeur de $z = 27$ pour les solutions suivantes :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}) = (9, 0, 0, 21, 6, 0)$$

Exemple (itération 2)

On choisit d'augmenter la variable x_3 :

$$\begin{array}{rcl} x_3 > 18 & : & x_1 < 0 \\ x_3 > \frac{42}{5} & : & x_4 < 0 \\ x_3 > \frac{3}{2} & : & x_5 < 0 \text{ contrainte la plus stricte} \end{array}$$

- x_3 du coté des variables de base et on passe x_5 du coté des variables hors base
- x_3 dans les autres équations ainsi que dans la fonction objectif

Itération 2 (suite)

Écriture du programme linéaire :

$$\begin{cases} z & = & \frac{111}{4} & + & \frac{x_2}{16} & - & \frac{x_5}{8} & - & \frac{11x_6}{16} \\ x_1 & = & \frac{33}{4} & - & \frac{x_2}{16} & + & \frac{x_5}{8} & - & \frac{5x_6}{16} \\ x_3 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3x_2}{8} & - & \frac{x_5}{4} & + & \frac{x_6}{8} \\ x_4 & = & \frac{69}{4} & + & \frac{3x_2}{16} & + & \frac{5x_5}{8} & - & \frac{x_6}{16} \end{cases}$$

On a alors $z = \frac{111}{4}$ avec la solution de base :

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}) = (\frac{33}{4}, 0, \frac{3}{2}, \frac{69}{4}, 0, 0)$$

Exemple (itération 3)

Augmentation de la valeur de x_2 :

$$\begin{array}{rcl} x_2 > 132 & : & x_1 < 0 \\ x_2 > 4 & : & x_3 < 0 \end{array}$$

x_2 peut être aussi grand que possible car x_4 et x_2 grandissent enser

- Expression de x_2 en fonction de x_3, x_5 et x_6.

Itération 3 (suite)

Écriture du programme linéaire :

$$\begin{cases} z &= 28 - \frac{x_3}{6} - \frac{x_5}{6} - \frac{2x_6}{3} \\ x_1 &= 8 + \frac{x_3}{6} + \frac{x_5}{6} - \frac{x_6}{3} \\ x_2 &= 4 - \frac{8x_3}{3} - \frac{2x_5}{3} + \frac{x_6}{3} \\ x_4 &= 18 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_5}{2} \end{cases}$$

Exemple (solution du programme linéaire)

On annule les valeurs des variables hors base :

$$\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}\right) = \left(8, 4, 0, 18, 0, 0\right) \text{ avec } z_{max} = 28$$

La solution du problème initial est donc :

$$\begin{cases} x_1 & = & 8 \\ x_2 & = & 4 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Exemple (solution du programme linéaire)

Ici $x_4 = 18$:

- il existe un écart de 18 entre la fonction linéaire exprimant la contrainte et la borne sur cette contrainte
- Cette borne aurait donc pu être plus restrictive
- On le vérifie en remplaçant les valeurs de x_1, x_2 et x_3 dans la première inéquation du programme linéaire initial :

$$\begin{aligned} \underbrace{x_1 + x_2 + x_3} &\leq 30 \\ 12 &\leq 30 \end{aligned}$$

NB : Attention les solutions ne sont pas toujours entières